

Speculae Cracov.



I. H. LAMBERT

ACADEMIAE SCIENTIARVM ELECTORALIS BOICAE MEMBRI ET PROFESSORIS HONORARII, SOCIETATIS PHYSICO-MEDICAE BASILEENSIS MEMBRI, REGIAE SOCIETATI SCIENTIARVM GOETTINGENSI COMMERCIO LITERARIO ADIVNCTI

INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM PROPRIETATES.



AVGVSTAE VINDELICORVM,
SVMTIBVS EBERHARDI KLETT VIDVAE.
MDCCLXI.



PRAEFATIO.



Plurima ſupereſſe videntur, Matheſeos adplicatae capita, quae etſi iam paſſim ab Auctoribus ſint pertractata, attamen ab eo fine, ad quem erant perducenda, immenſum quantum diſtant. Duo potiſſimum ſunt, quae moram nectere poſſe, primo quidem intuitu videntur. Quodſi enim theoria vel maxime ob praxin excolatur, ſaepiſſime citatiori paſſu, illa neglecta vel obiter tractata, ad hanc properamus, eamque ingredimur viam, quae primo ſeſe nobis offert, nulla habita breuitatis ambituumue ratione. Porro & ipſa

theoria, quam curatius euoluendam esse prospicimus, haud raro speciem problematis intricatissimi prae se fert, atque cum eam leuiter adspicimus vel e limine tantum salutamus, ita videtur complexa & ardua, ut & eos qui laboris sunt patientissimi & quos in noua & elegantiora fert animus impiger, deterrere possit. Nescio tamen quaenam subinde felicioris successus spes intuentem penitiusque rimantem arrideat, ut cum labore improbo rem adgreditur, spem ipse euentus superet, certe hic viam sternat iis, qui ad veram absolutamque metam pertingere gestiunt.

Quae sese mihi obtulerunt specimina, utramque hanc difficultatis caussam luce sua collustrantia, his edoctus sum, problema quoduis intricatius peculiarem sibique propriam requirere methodum, peculiaremque artificiorum heuristicorum combinationem, quae nisi iunctim sumta & suo quaeque ordine meditanti succurrant, spem elegantioris solutionis fallunt, aut nonnisi per prolixiores ambages, eo quo deueniendum erat, conducunt. Accedit quandoque, ut solutio quaestionis vel ideo incassum tentetur, quod verum rei momentum adhucdum latet, atque saepissime, quid

quid sibi velit id quod vel quaerimus vel iam inuenimus, menti sese subducit. Hoc vero ipso praetergredimur id in quo cardo rei vertitur. Quodsi porro theoria praestruenda reuera deprehendatur nimis complexa difficultatisque plena, expedit utique casum euoluere specialiorem magisque concinnum, quo facto haud raro res praeter exspectationem ita cadit, ut elegantiores proprietates, quas casus iste nobis offert, leui mutatione facta uniuersalius patere atque ad casus omnes extendi posse facili negotio peruideamus. Contra ea haud raro huiuscemodi theoria difficilioris speciem mentitur, re vero actu tentata longe sese ostendit faciliorem. Denique casus iste, quem curatius examinare propositum est, pluries multifariis circumstantiis a re ipsa prorsus alienis ita videtur inuolutus, ut an istae remoueri tutoque praetermitti queant, primo quidem obtutu nequaquam liquescat, re autem curatius perlustrata non modo deprehendantur alienae verum & quandoque mere arbitrariae.

Exempla, quibus his assertionibus lux adfundatur, aliunde in medium heic proferre superfluum duco, quippe singula veluti

luti in ſummam collecta in hoc opuſculo occurrunt, in quo *Proprietates inſigniores orbitae cometarum* eodem prorſus modo euolutas dedi, quo tribus abhinc annis in tractatu *Les proprietés remarquables de la route de la lumiere par les airs*, ſemitas luminis per plura media diaphana ſphaerica eaque concentrica perueſtigaui.

Plures utique iam proſtant methodi orbitam cometae ex datis tribus ipſius locis geocentricis, vel tentando, vel conſtructione, vel denique ſubducto calculo definiendi, unde hoc certe reſpectu de crambe bis, ter vel centies recocta ſermonem heic eſſe iniiciendum iudicabunt, qui norunt, quaenam veſtigia mihi hac in re erant premenda. Illuſtria ſane ſi quae vel maxime hoc nomen merentur, at ni fallor veſtigia tantum, quae a primis fontibus veluti per ſaltum eo deducebant, quo, praeſtructa enucleatiori theoria, via concinniori deueniendum fuiſſet. Nota iam erant prima quibus cetera ſuperſtruerentur principia polique iura, at ab ipſo hoc problemate, quo ex tribus obſeruationibus eruenda erat cometae orbita, quodque ſcopi primarii vices ſuſtinet, nimis iſta videbantur remota. Mirum tamen videri pote-

poterat, an elegantiſſimae illae proprietates, quibus gaudent ſectiones conicae, & in quibus eruendis ſummi geometrae veluti certatim ab antiquiſſimis retro temporibus operam collocarunt indefeſſam, prorſus inutiles atque ſuperfluae forent, ſimul ac cometarum orbitis eſſent adplicandae? Res ipſa utique tentamine digna, ſpes haud inana, at ſuperauit euentus, quippe elegantiores iſtae proprietates, dum cometarum orbitis ita adplicantur, ut areae ſubſtituatur tempus numeris abſolutis definitum, quantumuis iam ſint concinnae, concinniores euadunt. Has iam ita in hoc opuſculo congeſſi, ut eas poſitiones, quae independenter ab orbitis cometarum ſectiones conicas in ſe ſpectatas concernunt, quo uniuerſalius paterent, lemmatum inſtar proponerem, eaſque hac ratione a ceteris, quae ad euoluendas orbitarum proprietates quicquam facerent, diſtinguerem. Nouis iam nota interſerere e re eſſe videbatur, quo clarius eluceſceret poſitionum nexus. Ex nouis tamen ea tantum in medium protuli, quae elegantiora eſſent & uniuerſaliora, quibuſque in apricum productis haud deeſſent, quae ulterius progreſſuro viam oſtendere poſſent, quaeque ſubin-

ſubinde indicaui. Huc referas meditata de proiectione orthographica in planum eccliptices vel aliud quoduis utiliter ipſi ſubſtituendum. Similiter Lemmata quaedam in prima Sectione ipſi tractationi praefixa, & quae in Sectione IV. de differentia orbitarum parabolicarum, ellipticarum & hyperbolicarum breuibus diſſerui. Orbitam potiſſimum parabolicam curatius perluſtraui, atque theoremata & problemata ad eam ſpectantia luce ſua ita videbantur conſpicua, ut quae plerumque illuſtrationis ergo adferuntur exempla, hic deeſſe poſſent abſque ullo claritatis detrimento. Orbitas vero ellipticas in ultima Sectione eatenus tantum perueſtigavi, quatenus palam fieret, qua ratione elegantiſſimae orbitae parabolicae proprietates ceteris quoque ſectionibus conicis eſſent adplicabiles. Hanc vero prouinciam ſi quis in ſe ſuſcipere operae pretium eſſe ducat, utiliter in ſubſidium vocabit, quae ſummus EVLERVS eximia qua pollet ingenii ſagacitate in *Theoria motuum Planetarum & Cometarum* demonſtrata dedit.



PRO-

PROPRIETATES INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM.

SECTIO I.

Praeſtruuntur Lemmata uniuerſaliora, quibus indoles Parabolae, variaeque ipſius proprietates in theoria motus Cometarum uſui futurae exponuntur.

LEMMA I.

§. 1. *Sit AF axis, F focus parabolae AN,* Fig. 1. *ducto radio vectore quocunque FN, & tangente NT, erit angulus* $TNF = \frac{1}{2} . NFB$.

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam parabolae eſt $FT = FN$, adeoque $FTN = TNF$. Sed $FTN + TNF = NFB$, quare $TNF = \frac{1}{2} NFB$.

LEMMA II.

§. 2. *E vertice A erigatur AS ad axin normalis, quae tangentem TN ſecet in S, ducatur FS, dico angulum AFN eſſe biſectum, & triangula AFS, SFN eſſe ſimilia.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam parabolae eſt TS = SN, FT = FN, adeoque angulus TFS = SFN. Porro FS eſt ad tangentem TN normalis, adeoque triangulum FSN rectangulum. Sed ob angulum SAF rectum, triangulum FAS quoque eſt rectangulum, unde ob angulos AFS, SFN aequales, utrumque iiſdem gaudet angulis. Sunt ergo ſimilia.

COROLLARIVM I.

§. 3. Erit ergo AF : FS = FS : FN. *Quare FS eſt media proportionalis inter FA & FN.*

COROLLARIVM II.

§. 4. Cum ſit ASF = SNF, erit AF = SF. ſin ASF – SF. ſin SNF = FN. ſin FNT². *Quare dato radio vectore FN & angulo FNT, faciliime dabitur diſtantia foci a vertice AF, & ſitus axeos.*

COROLLARIVM III.

§. 5. Cum angulus FSN conſtanter ſit rectus, foco F & recta AS poſitione datis, ope normae, foco F & quibusuis punctis S adplicandae *dicto citius ducentur quotuis tangentes SN, parabolae ambitum vel ſua ſponte delineaturae.*

SCHOLION.

§. 6. Propoſitiones hae longe uniuerſalius patent, atque paucis mutatis quibuſuis ſectionibus conicis adplicantur. Quod de parabola ſequentem in modum palam fiet.

LEMMA III.

§. 7. *Si ad duo puncta parabolae N, M ducantur tangentes NR, RM, atque e foco F agantur rectae FN, FM, FR, triangula NFR, RFM erunt ſimilia, & producta tangente MR in T, angulus TRN erit = NFR = RFM.* Fig. 2.

DEMONSTRATIO.

E vertice A erigatur AT ad axin AF normalis, producantur tangentes RM, RN in T & S, atque agantur rectae FS, FT. Quoniam anguli FSR, FTR ſunt recti (§. 2.) eidemque rectae FR inſiſtunt, puncta F, S, T, R erunt in peripheria circuli, cuius diameter FR. Quare FST + FRT = 180°, adeoque ASF = TRF = SNF. Unde cum triangula iſta ſint ſimilia, erit quoque SFN = TFR. Quare SFT = NFR = SRT. Eſt vero (§. 1.) SNF = ½ NFB, TMF = ½ MFB, unde SNF – TMF = ½ NFM. Sed per naturam quadranguli eſt SNF – TMF = NFM – TRS, adeoque NFM – TRS = ½ NFM, ſiue TRS = ½ NFM = NFR. Quare recta FR angulum NFM biſecat. Cumque ſit SNF = TRF, erit quoque FNR = FRM, adeoque in triangulis FNR, FRM anguli reſpondentes ſunt aequales, quare triangula ipſa ſunt ſimilia.

COROLLARIVM I.

§. 8. Erit ergo FN:FR=FR:FM. *Adeoque FR est media proportionalis inter FN, FM.* Unde FN:FR=FR:FM=$\sqrt{}$FN:$\sqrt{}$FM.

COROLLARIVM II.

§. 9. Datis ergo foco F & duobus parabolae punctis N, M, ob angulum NFM bisectum, & FR=$\sqrt{}$(FN.FM), facillime ducentur tangentes RNS, MRT, atque ad has normales FS, FT, proinde & TSA, & FA.

COROLLARIVM III.

§. 10. Similiter dato triangulo FNM dabitur triangulum FRM, quare & angulus RMF, eritque AF=FM. sin RMF^2 (§. 4.)

COROLLARIVM IV.

§. 11. Cum sit FRM=FNR, manente recta FN & tangente NR, angulus FRM erit constans, quaecunque sit rectae FM ad FN inclinatio. Uniuersalius itaque patet methodus parabolam construendi supra (§. 5.) exposita.

COROLLARIVM V.

§. 12. Ducta chorda NM, erit summa angulorum RNM+RMN=TRS=NFR.

COROLLARIVM VI.

§. 13. Porro cum sit

NR:RM=sin RMN:sin RNM

& ob

& ob angulum NFM bisectum

NR:RM=sin RMF:sin RNF

erit

sin RMN:sin RNM=sin RMF:sin RNF

COROLLARIVM VII.

§. 14. Ob triangula FNR, FRM similia, est

NR:RM=FN:FR

Sed (§. 8)

FN:FR=$\sqrt{}$FN:$\sqrt{}$FM

Quare (§. 13.)

$\sqrt{}$FN:$\sqrt{}$FM=sin RMF:sin RNF

LEMMA IV.

§. 15. *Si ad tria parabolae puncta L, M, N* Fig. 3. *ducantur tangentes LR, RN, PMQ, puncta intersectionis P, R, Q una cum foco F erunt in peripheria circuli.*

DEMONSTRATIO.

Est enim (§. 7.)

TRL=$\frac{1}{2}$LFN=$\frac{1}{2}$LFM+$\frac{1}{2}$MFN

Sed (§. cit.)

$\frac{1}{2}$.LFM=PFM

$\frac{1}{2}$.MFN=MFQ

Quare

TRL=PFM+MFQ=PFQ.

Unde in quadrangulo FPRQ anguli oppositi PFQ+PRQ=180°. Quae proprietas est quadrilateri circulo inscripti, constat ergo propositum.

 COROL-

COROLLARIVM I.

§. 16. Tribus itaque parabolae tangentibus positione datis, per puncta intersectionis P, Q, R duci poterit circulus QRPF, qui per focum parabolae transeat.

COROLLARIVM II.

§. 17. Proinde si positione dentur quatuor parabolae tangentes, duo describentur circuli, quorum intersectio focum parabolae exhibeat.

LEMMA V.

§. 18. *Manente utraque tangente LR, RN, situs tertiae PMQ varietur utcunque, ratio inter partes abscissas LP, RQ erit constans.*

DEMONSTRATIO.

Est enim

$$LFP = \tfrac{1}{2}LFM$$
$$LFR = \tfrac{1}{2}LFN$$

unde

$$PFR = \tfrac{1}{2}MFN = MFQ$$

adeoque addendo partem communem RFM, erit

$$RFQ = PFM = LFP$$

Sed est quoque

$$PLF = QRF$$

unde triangula LPF, RQF sunt similia, adeoque ratio inter LP & RQ constans.

COROLLARIVM I.

§. 19. Erit ergo

$$LP:RQ = LR:RN = LF:RF$$

siue

$$LP:RQ = \sqrt{LF}:\sqrt{NF}$$

COROLLARIVM II.

§. 20. Hinc quoque erit

$$RP:QN = \sqrt{LF}:\sqrt{NF}$$

COROLLARIVM III.

§. 21. Quare &

$$LR = PR + \frac{RQ.LR}{RN}$$

siue

$$\frac{PR}{LR} + \frac{RQ}{NR} = 1.$$

COROLLARIVM IV.

§. 22. Cum sit

$$PFM = LFP$$
$$PFR = MFQ$$

erit addendo $PFQ = LFR = \tfrac{1}{2}LFM$

Est vero quoque $FPM = FLP = FRQ$

quare triangula LRF, RNF, PFQ sunt similia.

COROLARIVM V.

§. 23. Quicunque ergo sit situs tangentis PMF, manente utraque tangente LR, RN, ratio inter latera FP, PQ, FQ erit constans.

LEMMA VI.

Fig. 4. §. 24. *Tribus parabolae tangentibus Rr, RQ, rq positione datis, si ducatur quarta quaecunque qPQ, ratio inter partes abscissas qP, PQ erit constans.*

DEMONSTRATIO.

Etenim per corollarium [illegible] Lemmatis praecedentis (§. 23) ratio inter PF, PQ nec non inter PF, Pq est constans, quare & ratio inter PQ, Pq constans erit.

LEMMA VII. PROBLEMA I.

§. 25. *Tribus rectis Rr, RQ, rq positione datis, ducenda sit quarta qQ talis ut partes abscissae qP, PQ sint in ratione data.*

SOLVTIO.

Problema hoc indeterminatum est. At si unica recta qQ ducta sit conditioni satisfaciens, dabuntur quatuor parabolae tangentes, quarum ope definietur situs foci F per §. 17. atque proinde construetur ipsa parabola per §. 9. siue quotlibet eius tangentes per §. 5. Cunctae vero vi lemmatis sexti conditioni problematis satisfacient.

Aliter.

Cum sit (§. 24.)

$$qP:PQ = SR:RM = rm:Sr$$

erit componendo

$$SR:SM = rm:mS$$

siue

siue

$$SM:Sm = SR:rm$$

Sed est quoque (§. 19.)

$$SM:Sm = QM:Sq$$

Quare

$$SR:rm = QM:Sq.$$

Data itaque ratione inter qP, PQ per analogiam primam dabitur RM & rm, adeoque situs punctorum contactus M, m. Assumta itaque abscissa qualibet QM, erit haec ad Sq in ratione constante Sr:rm. Unde pro quouis puncto Q dabitur respondens q, quo duci possit recta qQ.

Aliter.

Cum sit

$$Pq:\sin qrP = qr:\sin.qPr$$
$$PQ:\sin QRP = QR:\sin QPR$$

&

$$qPr = QPR$$

erit

$$Pq:PQ = \frac{qr.\sin qrP}{\sin qPr}:\frac{QR.\sin QRP}{\sin qPr}$$

Quare

$$\frac{PQ}{Pq}.\sin qrP:\sin QRP = QR:qr = \frac{PQ}{Pq}:\frac{Sr}{SR}$$

Assumta itaque QR, dabitur quoque qr, & vicissim.

LEMMA VIII. PROBLEMA II.

§. 26. *Duobus parabolae punctis N, M una cum foco F positione datis construere parabolam.* Fig. 5.

 SOLV-

SOLVTIO.

Diametro NM deſcribatur ſemicirculus MVN, fiat Fn $=$ FN, quo habeatur differentia nM. Haec transferatur ex N in V, ut chorda NV ſit $=$ nM. Ducatur MVH, atque ad hanc ex foco F demittatur normalis FH, erit haec axis parabolae. Denique fiat AF $= \frac{1}{2}$(FM − FH) eritque A parabolae vertex. His vero datis facile abſoluetur parabolae conſtructio.

DEMONSTRATIO.

Per naturam parabolae eſt

$$FM = FH + 2AF$$
$$FN = FK + 2AF$$

Quare differentia

$$FM - FN = FH - FK = HK = NV$$

Sed ob angulum NVM rectum, chorda NM ſubtendit ſemicirculum NVM, & NV eſt axi AH parallela.

SCHOLION.

§. 27. Aliam huius problematis ſolutionem iam ſupra indicauimus (§. 9.)

LEMMA IX. PROBLEMA III.

§. 28. *Dato triangulo NFM inuenire aream ſegmenti NQM.*

SOLVTIO.

Ponatur parabolae parameter $= p$, porro

$$AH = x \qquad HM = y$$
$$AK = \xi \qquad KN = n$$

erit

erit area

ſegmenti AMH $= \frac{2}{3}xy$
ſegmenti ANK $= \frac{2}{3}\xi n$
quadrilateri KNMH $= \frac{1}{2}(x-\xi)\cdot(n+y)$

Quare area ſegmenti NQM erit

$$= \frac{2}{3}xy \quad \frac{2}{3}\xi n - \frac{1}{2}(x-\xi)\cdot(y+n)$$

ſiue debita reductione facta

$$= \frac{1}{6}(xy - \xi n - 3xn + 3\xi y)$$

At vero eſt

$$x = y^2 : p$$
$$\xi = n^2 : p$$

Quare ſubſtituendo erit area ſegmenti NQM

$$B = \frac{1}{6p}(y^3 - 3y^2n + 3yn^2 - n^3)$$

ſiue

$$B = (y-n)^3 : 6p = MV^3 : 24AF$$

Pendet itaque area ſegmenti NQM unice a differentia ordinatarum KN, HM, & diſtantia foci a vertice AF.

Sit iam

$$FM = a$$
$$FN = b$$
$$NFM = 2c$$
$$NM = k$$

erit

$$2ab \cos 2c = a^2 + b^2 - k^2$$

ſed

$$\cos 2c = 1 - 2 \sin c^2$$

unde

$$4ab \sin c^2 = k^2 - (a-b)^2 = MV^2$$
$$MV = 2 \sin c \sqrt{ab}$$

Porro eſt (§. 8.)

$$FR = \sqrt{ab}$$

Fig. 2.

Unde

Unde

$$RW = \sin c \,.\, \sqrt{ab}$$
$$MW = a - \cos c \,.\, \sqrt{ab}$$
$$\sin RMW^2 = b \sin c^2 : (a + b - 2\cos c \,.\, \sqrt{ab})$$

Sed (§. 4.)

$$AF = FM \,.\, \sin RMW^2$$

Quare

$$AF = \frac{ab \,.\, \sin c^2}{a + b - 2\cos c \,.\, \sqrt{ab}}$$

Eſt vero

Fig. 5. $$B = MV^3 : 24\, AF$$

Quare ſubſtituendo, erit

$$B = \tfrac{1}{3} \sqrt{ab} \,.\, \sin c\, (a + b - 2\sqrt{ab} \,.\, \cos c)$$

COROLLARIVM.

§. 29. Facile iam hinc habebitur area ſectoris parabolici NFMQ; ſi ſegmento NQM addatur area trianguli NFM, quae eſt

$$= \tfrac{1}{2} ab \,.\, \sin 2c = ab \sin c \,.\, \cos c$$

Quare dicta area ſectoris NFMQ $= A$, erit

$$A = \tfrac{1}{3} \sqrt{ab} \,.\, \sin c \,.\, (a + b) + \tfrac{1}{3} ab \,.\, \sin c \,.\, \cos c$$

ſiue

$$A = \tfrac{1}{3} \sqrt{ab} \,.\, \sin c\, (a + b + \sqrt{ab} \,.\, \cos c)$$

LEMMA X. PROBLEMA IIII.

§. 30. *Datis lateribus trianguli NFM inuenire diſtantiam foci F a vertice A, & aream ſectoris parabolici NFM.*

SOLVTIO.

Per formulas trigonometricas eſt

$$4ab \sin c^2 = (k + a - b) \,.\, (k - a + b) = k^2 - (a - b)^2$$
$$4ab \cos c^2 = (k + a + b) \,.\, (a + b - k) = (a + b)^2 - k^2$$

Quare

Quare cum ſit (§. 28. 29.)

$$AF = ab \,.\, \sin c^2 : (a + b - 2\cos c \,.\, \sqrt{ab})$$
$$A = \tfrac{1}{3} \sqrt{ab} \,.\, \sin c\, (a + b + \cos c \,.\, \sqrt{ab})$$

erit ſubſtitutione facta

$$AF = \frac{k^2 - (a - b)^2}{4[a + b - \sqrt{((a + b)^2 - k^2)}]}$$
$$A = \tfrac{1}{6} \,.\, \sqrt{(k^2 - (a - b)^2)} \,.\, [a + b + \tfrac{1}{2} \sqrt{((a + b)^2 - k^2)}]$$

COROLLARIVM I.

§. 31. Cum ſit

$$(a + b) - \sqrt{((a + b)^2 - k^2)} = \frac{k^2}{(a + b) + \sqrt{((a + b)^2 - k^2)}}$$

erit quoque

$$AF = (k^2 - (a - b)^2) \,.\, [a + b + \sqrt{((a + b)^2 - k^2)}] : 4k^2$$

COROLLARIVM II.

§. 32. Si angulus $c = \tfrac{1}{2}$ NFM fuerit 90°, erit $k = a + b$, quare hoc caſu erit

$$AF = \frac{ab}{a + b} = ab : k$$
$$A = \tfrac{1}{3} (a + b) \sqrt{ab} = \tfrac{1}{3} k \sqrt{ab}$$

SCHOLION.

§. 33. Literae a, b, c, k, quibus in utroque problemate praecedente uſi ſumus, conſtanter eundem retinebunt ſignificatum, quem hic ipſis tribuimus. Quod hic ideo notandum, quo ſuperflua reddatur eiuſdem denominationis continua repetitio.

LEM-

LEMMA XI. PROBLEMA V.

Fig.2. § 34. *Datis lateribus trianguli NFM invenire angulum RMF vel SNF.*

SOLVTIO.

Cum ſit (§. 28.)

$$\sin RMF^2 = b \sin c^2 : (a+b-2\cos c \sqrt{ab})$$

atque (§. 30.)

$$4ab \sin c^2 = k^2 - (a-b)^2$$

$$4ab \cos c^2 = (a+b)^2 - k^2$$

erit ſubſtitutione facta

$$\sin RMF^2 = \frac{k^2 - (a-b)^2}{4a[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$

ſimilique ratione (§. 14.)

$$\sin SNF^2 = \frac{k^2 - (a-b)^2}{4b[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$

COROLLARIVM I.

§. 35. Cum ſit (§. 1.)

$$MFB = 2RMF$$

erit

$$\cos MFB = 1 - 2\sin RMF^2$$

adeoque

$$\cos MFB = 1 - \frac{k^2 - (a-b)^2}{2a[a+b-\sqrt{(a+b)^2-k^2)}]}$$

COROLLARIVM II.

§. 36. Si angulus NFM euadat $=180°$, erit $a+b=k$, adeoque

$$\cos MFB = 1 - \frac{2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}$$

SCHO-

SCHOLION.

§. 37. Alio inſuper modo exprimetur angulus RMF ſimulque & angulus RMN per a, b, c, ſi quaeratur utriuſque cotangens. Eſt enim $FRM = 180° - c - RMF$. Quare

$$FR : FM = \sin FRM : (\sin FRM + c)$$

Sed eſt (§. 8.)

$$FR : FM = \sqrt{b} : \sqrt{a}$$

Dicto itaque angulo $RMF = v$, erit

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin v : \sin(c+v)$$

ſiue ob

$$\sin(c+v) = \sin c . \cos v + \cos c . \sin v$$

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin v : (\sin c . \cos v + \cos c . \sin v)$$

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = 1 : (\sin c . \cot v + \cos c)$$

Unde

$$\cot v = \sqrt{\frac{a}{b}} . \operatorname{cosec} c - \cot c.$$

Porro dicto angulo $FMN = \omega$, ob $TRN = RFM = c$ (§. 7.) erit

$$MNR = c - \omega$$

quare

$$NR : RM = \sin \omega : \sin(c - \omega)$$

Eſt vero (§. 14.)

$$NR : RM = \sqrt{b} : \sqrt{a}$$

Quare

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin \omega : \sin(c-\omega)$$

ſiue

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin \omega : (\sin c . \cos \omega - \cos c . \sin \omega)$$

Unde erit

$$\cot \omega = \operatorname{cosec} c . \sqrt{\frac{a}{b}} + \cot c$$

Cum-

Cumque ſit

$$\cot v = \operatorname{coſec} c \,.\, \sqrt{\frac{[illegible]}{b}} - \cot c$$

patet, mutato tantum ſigno, eandem formulam exhibere cotangentem utriuſque anguli v, ω ſiue RMF, RMN.

LEMMA XII.

Fig. 6. §. 38. *Biſecta chorda NM in G, ducatur WGR axi AH parallela, ducantur porro tangentes NR, RM, atque inſuper recta FQ e foco F, erit RQ = QG = QE.*

DEMONSTRATIO.

Producta tangente NR in P, agatur MP axi parallela, per naturam parabolae erit

$$RQ : PM = NR^2 : NP^2$$

At vero

$$NR : NP = NG : NM = 1 : 2$$

Quare

$$RQ : PM = 1 : 4$$

Sed

$$RG : PM = 1 : 2$$

Quare

$$RQ : RG = 1 : 2$$

adeoque

$$RQ = QG$$

Porro recta, quae parabolam in Q tangit, chordae NM eſt parallela, atque ad rectas FQ, QW ſub eodem angulo inclinata, unde erit

$$QEG = QGE$$

adeoque

$$QE = QG = RQ.$$

SCHO-

SCHOLION.

§. 39. Cum QW ſit parabolae diameter, dabitur relatio inter FQ, QG, NM, eritque

$$NM^2 = 16 . FQ . QG.$$

Similiter erit

$$NP^2 = 16 . FN . QR = 16 . FN . QG$$

adeoque

$$NP : NM = \sqrt{FN} : \sqrt{FQ}$$

ſiue

$$NR : NG = \sqrt{FN} : \sqrt{FQ}$$

LEMMA XIII.

§. 40. *Si per medium chordae G ducatur ordinata IGg ad axin normalis, atque iungatur gF, erit gF = (FN + FM) : 2.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim

$$Fg - FN = KN$$
$$FM - Fg = KV = KN$$

adeoque

$$Fg - FN = FM - Fg$$

ſiue

$$Fg = \frac{FN + FM}{2}$$

SCHOLION.

§. 41. Lemma hoc latius patet, atque ſingulis ſectionibus conicis adplicabile eſt.

 LEM-

LEMMA XIV.

§. 42. *Ductis rectis FQ, QG, Fg ut in utroque Lemmate praecedente, erit* $Fg = FQ + QG$.

DEMONSTRATIO.

Est enim

$$GW = IH = FM - Fg$$
$$QW = FM - FQ$$

Quare subtrahendo

$$QW - GW = Fg - FQ = QG$$

adeoque

$$Fg = FQ + QG.$$

COROLLARIVM.

§. 43. Ob $QE = QG$ (§. 38.) erit quoque

$$Fg = FQ + QE$$

LEMMA XV. PROBLEMA VI.

§. 44. *Datis lateribus trianguli FNM, inuenire distantiam FQ siue initii diametri QW a foco F.*

SOLVTIO.

Cum sit (§. 42. 40.)

$$Fg = FQ + QG = \frac{FN + FM}{2}$$

atque porro (§. 39.)

$$NM^2 = 16 . FQ . QG$$

erit

$$FQ + \frac{NM^2}{16 . FQ} = \frac{FN + FM}{2}$$

Dicta

Dicta itaque $FQ = q$ erit

$$q = \frac{a+b}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - k^2]}$$

SCHOLION.

§. 45. Mutato signo eadem formula dabit QE, eritque

$$QE = QG = \frac{a+b}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - k^2]}$$

COROLLARIVM I.

§. 46. Hinc erit

$$FQ - QE = \tfrac{1}{2}\sqrt{[(a+b)^2 - k^2]} = FE$$

COROLLARIVM II.

§. 47. Est vero (§. 30.)

$$(a+b)^2 - k^2 = 4ab . \cos c^2$$

quare

$$FE = \sqrt{ab} . \cos c = FR . \cos RFM.$$

LEMMA XVI.

§. 48. *Ducta RL ad FM normali, erit* $FL = FE$, *&* $RL = GK$.

DEMONSTRATIO.

Est enim (§. 8.)

$$FR = \sqrt{ab}$$
$$RFM = c$$

adeoque

$$FL = \sqrt{ab} . \cos c$$
$$RL = \sqrt{ab} . \sin c$$

Sed

Sed (§. 30. 47.)

$\sqrt{ab}.\sin c = \frac{1}{2}\sqrt{(k^2-(a-b)^2)} = \frac{1}{2}MV = GK$

$\sqrt{ab}.\cos c = FE$

Quare

$RL = GK$

$FL = FE$

LEMMA XVII.

Fig. 7. §. 49. *Si tria puncta parabolae N, Q, M, una cum foco F nectantur rectis FN, FQ, FM, NM, NQ, QM, triangula NFQ, QFM erunt in ratione simplici abscissarum NE, EM, & segmenta NMQ, NQ, QM erunt in ratione triplicata rectarum NM, NG, GM, si QG sit axi AF parallela.*

DEMONSTRATIO.

Etenim triangula NQE, QEM sunt aeque alta, ob communem verticem Q, quare eorum areae sunt ut bases NE, EM. Similiter triangula NFE, EFM sunt aeque alta ob communem verticem F, quare eorum areae itidem sunt ut bases NE, EM. erit ergo componendo

$\triangle NFQ : \triangle FQM = NE : EM$

Porro ducta NV axi parallela, demissaque ordinata MV erit (§. 28.) area segmenti

$NMQ = MV^3 : 24\,AF$

$NQ = VW^3 : 24\,AF$

$QM = MW^3 : 24\,AF$

Quare

$NMQ : MV^3 = NQ : VW^3 = QM : MW^3$

siue areae segmentorum NMQ, NQ, QM sun in ratione triplicata abscissarum MV, VW MW. Sunt vero hae abscissae in ratione abscissarum NM, NG, GM. Constat ergo propositum.

SCHOLION.

§. 50. Quodsi angulus NFM 20 aut 30 gradus non excedat, segmenta NQ, QM ratione triangulorum NFQ, QFM, quibus adiacent sunt paruitatis contemnendae, quare sectores NFQ, QFM erunt proxime in ratione abscissarum NE, EM, chordae quae arcum integrum NM subtendit.

LEMMA XVIII. PROBLEMA VII.

§. 51. *Quatuor rectis BL, BI, DK, DH positione datis, ducere quintam LH talem, ut partes abscissae HI, IK, KL sint in ratione data.* Fig. 8.

SOLVTIO.

Sumto triangulo ABC, quod formant rectae puncta I, K, L secturae atque fiat KI : IH = AB : Be, porro KL : KH = BC : Cg siue LI : IH = AC : Cf; hinc dabuntur puncta e, f, g in eadem recta sita. Producatur igitur efg in H. Porro fiat HD : DM = HK : KI, unde dabitur punctum M. Ducatur porro MI ipsi DK parallela, atque recta per HI ducta erit recta quaesita.

 Ali-

Aliter.

Per trigonometriam erit

$$\sin CKI : AL = \sin BAD : KL$$
$$\sin CKI : DH = \sin ADE : HK$$
$$\sin CIK : EH = \sin DEB : HI$$
$$\sin CIK : BL = \sin ABE : IL$$

Unde fit

$$\frac{AL . \sin BAD}{KL} = \frac{DH . \sin ADE}{HK}$$
$$\frac{EH . \sin DEB}{HI} = \frac{BL . \sin ABE}{IL}$$

Fiat iam

$$KL : HK = 1 : m$$
$$HI : IL = 1 : n$$

erit

$$m(AB + BL) \sin BAD = DH . \sin ADE.$$
$$n(ED + DH) \sin DEB = BL . \sin ABE.$$

Unde porro

$$DH = \frac{m(AB + BL) \sin BAD}{\sin ADE}$$
$$DH = \frac{BL . \sin ABE - n . ED . \sin DEB}{n . \sin DEB}$$

adeoque

$$BL = n . \mathrm{s}DEB [m AB \, \mathrm{s}BAD + ED . \mathrm{s}ADE] : [\mathrm{s}ABE . \mathrm{s}ADE - mn \, \mathrm{s}BAD \, \mathrm{s}DEB]$$

Data vero BL, facile dabitur DH, unde & ſitus rectae HL.

SCHO-

SCHOLION I.

§. 52. Demonſtratio ſolutionis prioris ex Lemmate ſexto & ſeptimo petitur. Sunt enim rectae AB, AC, BC, eg, LH tangentes parabolae. Ceterum ſi in formula, quam exhibet ſolutio poſterior, lateribus uti praeſtet, eam ſequenti ratione mutare licet. Primo enim abit in ſequentem

$$BL = \left(m . n . \frac{AB . \sin BAD}{\sin ADE} + n . ED\right) : \left(\frac{\sin ABE.}{\sin DEB.} - \frac{m . n \sin BAD}{\sin ADE}\right)$$

Ducatur BD ipſi ED parallela, eritque

$$AdB = ADE$$
$$AB . \sin BAD : \sin ADE = Bd.$$
$$\sin ABE : \sin DEB = Ee : eB$$
$$\sin BAD : \sin ADE = eD : Ae$$

adeoque

$$BL = (m . n . Bd + n . ED) : \left(\frac{Ee}{eB} - m . n . \frac{eD}{Ae}\right)$$

ſiue

$$BL = n . eB . Ae (m . Bd + ED) : (Ee . Ae - m . n . eD . eB)$$

SCHOLION II.

§. 53. Aliam huius problematis ſolutionem inuenias in *Arithmetica uniuerſali* ſummi NEWTONI, qui idem ad eruendam Cometae diſtantiam geocentricam adhibuit, ponendo exiguam orbitae partem inſtar rectae ſpectari poſſe, ſumitque puncta H, I, K, L eſſe quatuor cometae loca in planum Eccliptices proiecta.

 LEM-

LEMMA XIX. PROBLEMA VIII.

Fig.9. §. 54. *Quatuor rectis positione datis AE, AG, BF, BH inscribere quadrilaterum datum EFGH.*

SOLVTIO.

Ob rectas positione datas dabuntur anguli CAD, CBD, CAB, CBA. Constructo itaque quadrilatero EFGH, per angulos oppositos EG, FH ducantur circuli ita ut arcus EG, FH sint angulis EAG, FBH duplo maiores, atque facile obuium est puncta A, B, in peripheriis horum circulorum esse sita. Fiat porro arcus Ea = 2 CAB, arcus FB = 2 ABD, atque per puncta b, a agatur recta baBA, quae in peripheria utriusque circuli situm punctorum B, A abscindet. Denique ducant HBC, FBD, eruntque EA, GA, FB, HB quatuor istae rectae quibus quadrilaterum EFGH erat inscribendum.

SCHOLION.

§. 55. Facile patet, haud opus esse ut latera quadrilateri EFGH data sint in eadem mensura, qua latera quadranguli ABCD, verum sufficit notos esse angulos E, F, G, H una cum ratione laterum inter se. Hac ratione usui esse poterit hoc problema, ubi cometae orbita iam proxime fuerit definita. Quod si enim proxime detur curuatura eius partis orbitae, quam cometa interuallo quatuor obseruationum percurrit, problema hoc voto magis satisfaciet ac praecedens, quod partem orbitae supponit esse rectam.

LEM-

LEMMA XX.

§ 56. *Bisecta chorda NM parabolae in G, ducatur GQ axi AF parallela, nectantur Q & focus F recta QF, denique chorda NM transferatur in n m, ita ut FQ eam sub angulo recto bisecet, dico puncta n, m esse in parabola nQm, cuius vertex Q. axis QF, focus F. & areae sectorum nFm, NFM erunt in ratione subduplicata semilaterum rectorum.* Fig. 10.

DEMONSTRATIO.

Etenim ob NG = GM, & GQ axi AF parallelam, chorda NM erit parallela rectae, quae parabolam tangit in Q. adeoque NEF = ½QEB, & QG = QE (§. 38. 1.) Porro per naturam parabolae est

$$NM^2 = 16\, FQ.QG$$

adeoque &

$$nm^2 = 16\,.FQ\,.QE$$

Quae aequatio est ad parabolam, cuius axis & distantia foci a vertice est FQ. Similiter ob QG = QE, area segmenti NQM erit ad aream segmenti nQm ut sinus anguli QGE = QEG = NEF ad sinum totum. At in eadem quoque ratione sunt triangula FNM Fnm, ob bases NM, nm aequales; Unde & integri sectores NFM, nFm sunt in ratione sinus anguli NEF ad sinum totum. Est vero (§. 4.)

$$\sin NEF : 1 = \sqrt{AF} : \sqrt{FQ} = \sqrt{2AF} : \sqrt{2FQ}$$

adeoque

$$NFMN : nFmn = \sqrt{2}.AF : \sqrt{2}.FQ$$

Sunt vero 2AF, 2FQ semilatera recta, unde constat propositum.

 SCHO-

SCHOLION.

§. 57. Lemma hoc, ſi debite limitetur, ad ſingulas ſectiones conicas extendi poterit. Idem quoque ita poſſe inuerti, ut ex data parabola nQm, deducatur quaeuis alia NQM, quae per verticem prioris Q tranſeat, vel me tacente patet.

LEMMA XXI. PROBLEMA IX.

§. 58. *Data chorda NM & ſagitta QG, inuenire aream ſegmenti NQM & ſectoris NFM.*

SOLVTIO.

Area ſegmenti nQm eſt $= \frac{2}{3}$QE.nm, trianguli nFm $= \frac{1}{2}$FE.nm, quare erit area ſectoris

$$nFmQ = \tfrac{2}{3}QE.nm + \tfrac{1}{2}FE.nm$$

ſiue

$$nFmQ = \tfrac{1}{6}QE.nm + \tfrac{1}{2}FQ.nm$$

Eſt vero (§. 56.)

$$nFmQ : NFMQ = nmQ : NMQ = \sqrt{FQ} : \sqrt{AF}$$
$$nm = NM$$
$$QE = QG$$

Quare erit area

$$\text{ſegmenti } NMQ = \tfrac{2}{3}NM.QG\sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

$$\text{ſectoris } NFMQ = NM(\tfrac{1}{6}GQ = + \tfrac{1}{2}FQ)\sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

Cum vero ſit

$$NM^2 = 16.QG.FQ$$

erit

erit area

$$\text{ſegmenti } NMQ = \tfrac{8}{3}\sqrt{(QG^3.AF)}$$

$$\text{ſectoris } NFMQ = (\tfrac{2}{3}QG^2 + \tfrac{1}{8}NM^2).\sqrt{\frac{AF}{QG}}$$

COROLLARIVM.

§. 59. Similiter erit area ſectoris

$$NFMQ = NM\left(\frac{NM^2}{96.FQ} + \tfrac{1}{2}FQ\right)\sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

LEMMA XXII. PROBLEMA X.

§. 60. *Data chorda NM $= k$ & ſumma laterum FM + FN $= a + b$, inuenire aream ſectoris FNQM.*

SOLVTIO.

Cum ſit (§. 58.)

$$NFMQ = NM(\tfrac{1}{6}QG + \tfrac{1}{2}FQ)\sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

atque porro (§. 44. 45.)

$$FQ = \tfrac{1}{4}[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]$$
$$QG = \tfrac{1}{4}[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]$$

erit ſubſtitutione debitaque reductione facta

$$NFMQ = \frac{k[a+b+\frac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}{3\sqrt{[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}}.\sqrt{AF}$$

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 61. Cum sit
$$[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}].[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]=k^2$$
erit quoque
$$NFMQ=\sqrt{[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}.[a+b+\tfrac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]\frac{\sqrt{AF}}{3}$$

COROLLARIVM II.

§. 62. Huius formulae factor posterior $a+b+\frac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}$ leui mutatione abit in
$$\tfrac{1}{2}(a+b)+\tfrac{1}{2}[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]$$
adeoque formula ipsa mutatur in sequentem
$$\frac{3.NFMQ}{\sqrt{AF}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{[(a+b)-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}.(a+b)+\tfrac{1}{2}k\sqrt{[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$
fiat breuitatis ergo $a+b=g$, eritque
$$\frac{3NFMQ}{\sqrt{AF}}=\tfrac{1}{2}g\sqrt{(g-\sqrt{(g^2-k^2)})}+\tfrac{1}{2}k\sqrt{(g+\sqrt{(g^2-k^2)})}$$

COROLLARIVM III.

§. 63. Hinc vero fit
$$\frac{3.NFMQ}{\sqrt{AF}}=\tfrac{1}{2}g\sqrt{\frac{g+k}{2}}-\tfrac{1}{2}g\sqrt{\frac{g-k}{2}}+\tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{g+k}{2}}+\tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{g-k}{2}}$$
adeoque
$$\frac{3.NFMQ}{\sqrt{AF}}=\tfrac{1}{2}(g+k)\sqrt{\frac{g+k}{2}}-\tfrac{1}{2}(g-k)\sqrt{\frac{g-k}{2}}$$

siue

siue breuissime
$$\frac{3.NFMQ}{\sqrt{AF}}=\left(\frac{g+k}{2}\right)^{3:2}-\left(\frac{g-k}{2}\right)^{3:2}$$
atque proinde area sectoris
$$FNMQ=A=\left[\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{3:2}-\left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{3:2}\right].\tfrac{1}{3}\sqrt{AF}$$

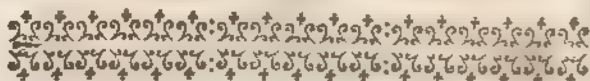
SCHOLION I.

§. 64. Hanc formulam admodum concinnam prolixiori ratiocinio erutam, infra breuius demonstratam dabimus, cum de inueniendo tempore, quo cometa datum quemlibet orbitae parabolicae arcum NM emetitur, sermo erit. Ceterum hic notabimus simile quid obtineri posse, si orbita fuerit sectio conica quaecunque, atque debitae fiant mutationes & limitationes.

SCHOLION II.

§. 65. En itaque Lemmata potiora, quae praestruenda esse duxi, quo concinnior euaderet theoria motus cometarum in orbitis parabolicis incedentium. Videbimus vero formulas hactenus erutas simpliciores fieri, si in vicem areae sectoris NFMQ substituamus tempus quo cometa arcum NM percurrit.

PRO-



PROPRIETATES INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM.

SECTIO II.

Exponuntur Symptomata notabiliora motus Cometarum parabolici.

LEX CAELI I.

§. 66. *Singula corpora caelestia, quae circa Solem gyrantur, Planetae nempe & Cometae, aguntur viribus centralibus, atque in Solem grauia sunt, ita ut grauitas decrescat reciproce ut quadratum distantiae.*

LEX II.

§. 67. *Proinde Tempora, quibus datum arcum orbitae percurrunt, areis sunt proportionalia, quas verrit radius vector, siue recta e centro Solis in centrum planetae vel cometae ducta.*

LEX III.

§. 68. *Ita ergo circa Solem aguntur, ut orbita, in qua incedunt, necessario sit Sectio conica, in cuius foco alterutro est centrum Solis.*

LEX

LEX IV.

§. 69. *Tempus quo cometa vel planeta arcum datum orbitae suae percurrit, est ut area, quam verrit radius vector, per radicem quadratam semilateris recti diuisa, si diuersi inter se comparentur cometae vel planetae.*

SCHOLION.

§. 70. Non est huius loci, ut exponamus, quaenam in demonstrandis his legibus experientiae, quaenam principiis mechanicis debeantur. Ansam dedit acutissimus KEPLERVS, cum tres posteriores ex operosissimis obseruationibus deduceret easque planetis adplicaret. Primam ex obseruationibus deduxit summus NEWTONVS, remque omnem ad principia Mechanices transtulit, cum theoriae virium centralium prima strueret fundamenta. Legem tertiam potissimum eius necessitatem solito suo ingenii acumine solitaque sagacitate in apricum produxit inter Geometras facile Princeps JO. BERNOVLLIVS. Singulae iam ita ubique sunt obuiae, atque velut in vulgus notae, ut actum agerem, si in iis denuo demonstrandis tempus terere vellem. Principiorum instar heic sunto, ex quibus specialiora deducentur motuum caelestium symptomata. Haec vero ut nexu magis naturali & continuo ex legibus istis manare queant, nouis iam nota praefigere atque immiscere propositum est, quatenus haec ad rem nostram quicquam facient.

THEO-

THEOREMA I.

§. 71. *Si duo pluresue Cometae in orbitis ellipticis incedant, quarum axes maiores ſunt aequales, tempora periodica erunt aequalia.*

DEMONSTRATIO.

Fig. 11. Sit F centrum ſolis unaque focus ellipſeos ADB, axis maior ſit AB, minor EG, ſemilatus rectum FD, erit per naturam ellipſeos

$$FD.AC = CE^2 = AF\, FB$$

Denotet porro $1 : \pi$ rationem diametri circuli ad peripheriam erit area ellipſeos

$$A = \pi . AC . CE$$

At vero per legem quartam (§. 69.) tempus eſt ut area per radicem quadratam ſemilateris recti diuiſa, quare dicto tempore periodico $= T$, erit

$$T = \frac{\pi . AC . CE}{m \sqrt{FD}}$$

Eſt vero

$$\sqrt{FD} = CE : \sqrt{AC}$$

adeoque erit

$$T = \frac{\pi}{m} . AC^{3:2}$$

Pendet ergo tempus periodicum unice ab axe maiore ellipſeos. Unde liquet propoſitum, ſimulque & ſequens

THEO-

THEOREMA II.

§. 72. *Tempora periodica cometarum & planetarum in ellipſibus incedentium ſunt in ratione ſesquiplicata ſemiaxium maiorum vel diſtantiae heliocentricae mediae.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim diſtantia media $FE = \frac{AF+FB}{2} = AC.$

Sed vi theorematis praecedentis eſt

$$T = \frac{\pi}{m} AC^{3:2}$$

Quare &

$$T = \frac{\pi}{m} . FE^{3:2}$$

PROBLEMA XII.

§. 73. *Exhibere diſtantias & tempora cometarum planetarumue in numeris abſolutis, una cum ratione, quam tempus & diſtantia inter ſe ſeruant.*

SOLVTIO I.

Cum tellus moueatur in ellipſi, ponatur eius diſtantia media ſiue, quod vulgo aiunt, radius orbis magni $= 100000$, atque in his partibus definiantur diſtantiae quaelibet aliae. Porro efferatur tempus in diebus naturalibus, horumque partibus decimalibus. Eſt vero tempus periodicum telluris $= 365,25659$ dierum.

C Quare

Quare erit in formula theorematis praecedentis

$$AC = FE = 100000$$
$$T = 365,25659.$$

Hinc iam habebitur valor literae m, quae rationem quaesitam denotat. Est vero

$$m = \frac{\pi . AC^{3:2}}{T}$$

adeoquè

$$\begin{aligned} \log. AC^{3:2} &= 7,5000000 \\ \log. \ \pi \ &= 0,4971499 \\ & \quad 7,9971499 \\ \log. \ T \ &= 2,5625980 \\ \log. \ m \ &= 5,4345519 \end{aligned}$$

unde

$$m = 271989,4.$$
$$T = \frac{\pi . AC^{3:2}}{271989,4.}$$

SOLVTIO II.

Inuentis fractionibus decimalibus, radius orbis magni commodius fit $= 1$. Ponatur itaque

$$T = n . \pi . AC^{3:2}$$

erit $AC = 1$, quare

$$\begin{aligned} n &= T : \pi \\ \log. T &= 2,5625980 \\ \log. \pi &= 0,4971499 \\ \log. n &= 2,0654481 \end{aligned}$$

unde

$$n = 116,2648. = \frac{1}{m}$$

Sit

Sit itaque area sectoris cuiuslibet NFM $= A$, Fig. 5. semilatus rectum $= s$, tempus quo percurritur arcus NM, in diebus naturalibus exprimendum $= T$, erit

1° posito radio orbis magni $= 100000$

$$T = \frac{A}{m\sqrt{s}} = \frac{nA}{\sqrt{s}} = \frac{A : \sqrt{s}}{271989,4}$$

2° posito radio orbis magni $= 1$, erit

$$T = \frac{A}{m\sqrt{s}} = \frac{n.A}{\sqrt{s}} = \frac{A . 116,2648}{\sqrt{s}}$$

SCHOLION.

§. 74. In sequentibus plerumque utemur literis π, m, n, A, T, quarum ergo significatus constanter retinebitur idem, haud secus ac ille, quem supra (§. 33.) literis *a*, *b*, *c*, *k* tribuimus. Significatum literarum m, T, A eodem sensu iam adhibuit perillustris EVLERVS in *Theoria cometarum & planetarum*.

PROBLEMA XXIII.

§. 75. *Inuenire celeritatem cometae in circulo incedentis.*

SOLVTIO.

Sit semidiameter circuli $= r$, erit eius area $= \pi r^2$, adeoque tempus periodicum

$$T = \frac{\pi . rr}{m\sqrt{r}} = \frac{\pi}{m} . r^{3:2}$$

 Hoc

Hoc tempore abſoluit peripheriam $=2\pi r$. Quare ſi celeritas exprimatur per arcum uno die naturali percurrendum, eaque dicatur $=K$, erit

$$K=2\pi r:T=2m:\sqrt{r}$$

THEOREMA III.

Fig. 12. §. 76. *Si cometa incedat in parabola AM celeritas in dato quouis loco M eſt ad celeritatem, qua incederet in circulo MP ad eandem a Sole F diſtantiam ut $\sqrt{2}$ ad 1.*

DEMONSTRATIO.

Cum tempora ſint ut areae per radicem quadratum ſemilateris recti diuiſae (§. 69.) erit tempus quo percurritur arcus parabolicus infinite paruus MN

$$T=MFN:m\sqrt{2AF}$$

tempus vero, quo percurritur arcus circularis MP

$$t=MFP:m\sqrt{FM}$$

At vero celeritates ſunt ut arcus per tempus diuiſi quare ſi dicantur C, K, erit

$$C=MN:T=MN.m\sqrt{2AF}:MFN$$
$$K=MP:t=MP.m\sqrt{MF}:MFP$$

adeoque

$$C:K=\frac{MN.\sqrt{2AF}}{MFN}:\frac{MP.\sqrt{MF}}{MFP}$$

Eſt vero (§. 4.)

$$AF=MF.\sin MNP^2=MF.MP^2:MN^2$$

Quare

Quare

$$MN\sqrt{AF}=MP\sqrt{MF}$$

Sed ob angulum MFN infinite paruum, areae ſunt aequales, adeoque ſubſtituendo erit

$$C:K=\sqrt{2}:1$$

COROLLARIVM.

§. 77. Cum celeritas circularis ſit (§. 75.)

$$K=2m:\sqrt{MF}$$

erit celeritas parabolica

$$C=2m\sqrt{2}:\sqrt{MF}$$

Quae formula exprimit ſpatium, quod cometa uno die naturali iuxta directionem tangentialem percurreret (§. 75.) niſi vi grauitatis a recta deflecteretur.

SCHOLION.

§. 78. Hac proprietate motûs parabolici uti licet, ſi proxime definienda ſit longitudo arcus exiguo temporis interuallo percurſi, eaque, debita adhibita limitatione, haud difficulter orbitis ellipticis adplicatur. Propoſitionis concinnitas inde eſt, quod celeritas parabolica unice pendet a diſtantia cometae heliocentrica, atque perinde eſt, quanta ſit parabolae parameter. At vero cum celeritas ſingulis momentis mutetur, exiguus propoſitionis ceteroquin notiſſimae eſt uſus. En ergo alias uniuerſaliores.

 PRO-

PROBLEMA XIIII.

Fig. 5. §. 79. *Dato utroque radio vectore NF, MF & angulo NFM, inuenire tempus, quo cometa emetitur arcum parabolicum NM.*

SOLVTIO.

Area sectoris NFMQ est (§. 29.)

$$A = \tfrac{1}{3} \sqrt{ab}. \sin c \, (a + b + \sqrt{ab}. \cos c)$$

Semilatus rectum (§. 28.)

$$s = 2AF = \frac{2ab \sin c^2}{a + b - 2 \cos c. \sqrt{ab}}$$

At vero (§. 75.) tempus

$$T = \frac{n . A}{\sqrt{s}}$$

Quare substituendo, erit

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} . (a + b + \sqrt{ab}. \cos c) \sqrt{(a + b - 2\sqrt{ab}. \cos c)}$$

COROLLARIVM I.

§. 80. Hac formula euoluta erit

$$18 m^2 T^2 = (a + b)^3 - 3(a + b) ab \cos c^2 - 2ab\sqrt{ab}. \cos c^3$$

siue

$$18 m^2 T^2 = a^3 + b^3 + 3(a + b) ab \sin c^2 - 2ab\sqrt{ab}. \cos c^3$$

ut adeo dato tempore T, ex quantitatibus a, b, c alterutra inueniatur ope aequationis tertii gradus.

COROL-

COROLLARIVM II.

§. 81. Si fuerit $c = \tfrac{1}{2}$NFM $= 90°$, erit NFM $= 180°$, adeoque $\cos c = 0$, quare formula breuissima

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} . (a + b)^{3:2}$$

exhibet tempus quo cometa e puncto quouis M peruenit ad punctum ipsi e diametro oppositum.

COROLLARIVM III.

§. 82. Quodsi ergo detur tempus, quo cometa ab uno nodorum ad alterum pertingit, dabitur longitudo lineae nodorum $a + b$, eritque

$$a + b = (18 m T)^{2:3}$$

PROBLEMA XV.

§. 83. *Data summa radiorum vectorum FN, FM una cum chorda NM quae triangulum NFM claudit, inuenire tempus, quo percurritur arcus NQM.*

SOLVTIO I.

Cum sit (§. 30.)

$$2AF = s = \frac{k^2 - (a - b)^2}{2[a + b - \sqrt{((a + b)^2 - k^2)}]}$$

$$A = \tfrac{1}{3}[a + b + \tfrac{1}{2}\sqrt{((a + b)^2 - k^2)}] . \sqrt{(k^2 - (a - b)^2)}$$

atque in genere (§. 75.)

$$T = \frac{\square A}{\sqrt{s}}$$

erit

erit ſubſtitutione debitaque reductione facta

$$T = \frac{n[a+b+\tfrac{1}{2}\surd((a+b)^2-k^2)]\surd[a+b-\surd((a+b)^2-k^2)]}{3\surd 2}$$

SOLVTIO II.

Cum ſit (§. 31.)

$$2AF = [k^2-(a-b)^2].[a+b+\surd((a+b)^2-k^2)]:2k^2$$

erit, hac formula utendo

$$T = \frac{kn[a+b+\tfrac{1}{2}\surd((a+b)^2-k^2)]}{3\surd 2[\surd(a+b+\surd((a+b)^2-k^2))]}$$

SOLVTIO III.

Eſt (§. 63.)

$$\frac{3A}{\surd AF} = \left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{3:2}$$

Sed (§. 75.)

$$T = nA:\surd s = A:m\surd 2AF$$

quare

$$T = \frac{\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{3:2}}{m.3\surd 2}$$

COROLLARIVM I.

§. 84. Dicta ſumma radiorum vectorum $a+b=g$, formula, quam ſuppeditat ſolutio prima reſoluitur in aequationem ſequentem

$$0 = k^6+6g^2k^4+9g^4k^2-144m^2T^2g^2$$
$$-432m^2T^2gk^2+72^2.m^2T^2$$

COROL-

COROLLARIVM II.

§. 85. Similiter formula Solutionis tertiae abit in ſeriem

$$4mT = k\surd g - \frac{k^3}{4.6.g^{3:2}} - \frac{1.3.5.k^5}{4.6.8.10.g^{7:2}}$$
$$- \frac{1.3.5.7.9.k^7}{4.6.8.10.12.14.g^{11:2}} - \&c.$$

ſiue reductis fractionibus

$$4mT = k\surd g - \frac{k^3}{24.g^{3:2}} - \frac{k^5}{128.g^{7:2}} - \frac{3.k^7}{1024\,g^{11:2}}$$
$$- \frac{143\,k^9}{98304\,g^{15:2}} - \&c.$$

Quae ſeries admodum eſt conuergens, quoties angulus NFM fuerit paucorum graduum. Ceteris caſibus formula ipſa praeſtat, cum abſoluta ſit.

PROBLEMA XVI.

§. 86. *Data chorda NM & ſagitta QG=QE, inuenire tempus quo cometa percurrit arcum NM.* Fig. 6.

SOLVTIO.

Cum ſit (§. 58.)

$$A = (\tfrac{2}{3}.QG^2+\tfrac{1}{8}NM^2).\surd\frac{AF}{QG}$$

atque porro (§. 75.)

$$T = nA:\surd 2AF$$

erit

erit

$$T = n(\tfrac{2}{3}.QG^2 + \tfrac{1}{8}NM^2) : \sqrt{2}QG$$

PROBLEMA XVII.

§. 87. *Data chorda NM & radio vectore FQ, inuenire tempus, quo cometa arcum NM emetitur.*

SOLVTIO.

Per formulam problematis praecedentis est

$$T = n(\tfrac{2}{3}QG^2 + \tfrac{1}{8}NM^2) : \sqrt{2}QG$$

Sed

$$\frac{NM^2}{16.FQ} = QG$$

Quare erit

$$T = \frac{n.NM}{\sqrt{2}}\left[\frac{NM^2}{96.FQ^{3:2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{FQ}\right]$$

COROLLARIVM.

§. 88. Hac formula euoluta habebitur aequatio

$$NM^3 + 48NM.FQ^2 = 96\sqrt{2}.mT.FQ^{3:2}$$

ex qua ea ratione quam in *Tom. III. Actorum Helueticorum* descriptam dedi, fit series

$$NM = \frac{2\sqrt{2}.mT}{\sqrt{FQ}} - \frac{\sqrt{2}.m^3T^3}{3.FQ^{7:2}} + \frac{m.^5T.^5\sqrt{2}}{6.FQ^{13:2}} - \frac{m^7T^7.\sqrt{2}}{9.FQ^{19:2}} + \&c.$$

siue

siue posito radio orbis magni $=1$, atque substituto valore ipsius $m = \frac{1}{n}$, quem vidimus esse (§. 73.)

$$n = 116,2648$$

prodibit series in numeris absolutis

$$NM = \frac{0,0243747.T}{\sqrt{FQ}} - 0,0000003006425\frac{T^3}{FQ^{7:2}} + 0,00000000001109490\,\frac{T^5}{FQ^{13:2}} - \&c.$$

Sunt vero logarithmi coefficientium

primi $= 0,3860969 - 2$
secundi $= 0,4780495 - 7$
tertii $= 0,0451232 - 11$
&c.

SCHOLION I.

§. 89. Haec series maxime videtur conuergens, at eo tantum casu citius conuergit, quo tempus T est paucorum dierum, atque radius vector FQ unitate parum sit minor.

SCHOLION II.

§. 90. Alio insuper casu usui esse poterit haec formula, cum computanda est longitudo ordinatae nm, dato tempore, quo arcus nQm percurritur. Fig. 10.

PROBLEMA XVIII.

§. 91. *Data sagitta QG & radio vectore FQ, inuenire tempus, quo cometa percurrit arcum NQM.*

SOLV-

SOLVTIO.

Cum ſit (§. 86.)

$$T = n(\tfrac{2}{3}QG^2 + \tfrac{1}{8}NM^2) : \sqrt{2QG}$$

atque

$$NM^2 = 16 FQ . QG$$

erit

$$T = n(\tfrac{2}{3}QG^2 + 2FQ.QG) : \sqrt{(2QG)}$$

COROLLARIVM.

§. 92. Hinc erit viciſſim

$$FQ = mT : \sqrt{8QG} - \tfrac{1}{3}. QG = \frac{a+b}{2} - QG$$

$$a + b = mT : \sqrt{2QG} + \tfrac{1}{3}QG$$

THEOREMA IV.

§. 93. *Sint omnia ut in lemmate vigeſimo (§. 56.) tempora, quibus percurruntur arcus NQM, nQm ſunt aequalia.*

DEMONSTRATIO.

Patet enim ex Problemate praecedente, tempus definitum eſſe per radium vectorem FQ & ſagittam QG. At vero in utraque parabola, vi Lemmatis citati idem eſt radius vector, & ſagittae QG, QE ſunt aequales. Unde quoque tempora quibus arcus nm, NM percurruntur aequalia ſunt.

Ali-

Aliter.

Tempora ſunt ut areae per radicem ſemilateris recti diuiſae (§. 69.) unde erunt ut (NFMN: $\sqrt{2AF}$) ad (nFmn: $\sqrt{2FQ}$) At vero (§. 57.)

$$\frac{NFMN}{\sqrt{2AF}} = \frac{nFmn}{\sqrt{2FQ}}$$

Quare & ipſa tempora ſunt aequalia.

COROLLARIVM.

§. 94. Cum tempus definiatur per ſummam radiorum vectorum Fn+Fm, ſiue FN+FM, & chordam nm, ſiue NM, hoc vero caſu ſit nm = NM (§. 56.) atque tempus utrumque aequale, patet viciſſim, eſſe quoque nF+mF = NF+MF. ſiue ſummam radiorum vectorum eſſe aequalem.

SCHOLION.

§. 95. Inſignis haec motus cometarum parabolici proprietas, ſi debite limitetur, ceteris quoque Sectionibus conicis adplicabilis eſt. Ceterum idem hic notandum, quod ad Lemma vigeſimum (§. 56.) notauimus, parabolae NM, retento foco F ſubſtitui poſſe quamlibet aliam, quae tranſeat per punctum Q. Cumque tempus, quo abſoluitur motus cometae per arcum quemuis NQM unice pendeat a longitudine chordae NM, & ſumma laterum NF+MF, hinc uniuerſaliſſime euidens fit motus cometarum parabolici iſochroniſmus, & quid ſibi velit celeritas ad eandem a ſole F diſtantiam in ſingu-

ſingulis quibuſuis parabolis eadem. At vero accedamus ad ea, quae hinc ſequuntur.

THEOREMA V.

§. 96. *Data ſumma radiorum vectorum FN, FM una cum chorda NM, tempus, quo traiicitur arcus NQM, quem chorda NM ſubtendit, plane idem eruetur, quacunque utaris parabola, dummodo ſumma laterum FN+FM ſemilatere recto ſit maior.*

DEMONSTRATIO.

Primum inde euidens eſt, quod chorda NM & ſumma laterum FN+FM definiendo tempori, quo percurritur arcus NQM ſatisfaciunt. Cum vero quaecunque aſſumatur parabola, ea tranſire debeat per punctum Q, patet maximum ſemilatus rectum fore = 2FQ. Eſt vero (§. 94) FN+FM = Fn+Fm, & per naturam parabolae Fm = Fn = FQ+QE adeoque Fn > FQ, unde FN+FM > 2FQ.

SCHOLION.

§. 97. Eligenda itaque parabola talis, ut eius ſemilatus rectum minor ſit quam 2FQ. Quodſi ergo conſtruenda ſit ſcala ſingulis quibuſuis parabolis inſeruitura, ea commodiſſime adhibebitur, cuius latus rectum = o, ſiue quod eodem redit, linea recta, a centro ſolis in infinitum producenda. Etſi vero vix cometa in huiuſcemodi parabola rectilinea incedat, utiliter tamen aſſumi poterit, quippe pro definiendo motu cometarum in quibuſuis aliis parabolis

rabolis inſtar moduli erit. Cumque haec parabola cum linea recta coincidat, cometa, qui in ea incedere ponitur, veluti in ſolem cadere videtur. Naſcitur hinc vel ſua ſponte

DEFINITIO I.

§. 98. *Lapſus parabolicus cometae in ſolem eſt eiuſdem in parabola inceſſus, cuius latus rectum = o, ſiue cuius vertex cum foco in centro ſolis coincidit.*

COROLLARIVM I.

§. 99. Quoniam parabola in infinitum excurrit, lapſus parabolici initium eſt nullum, adeoque in data quauis a ſole diſtantia iam adeſt definitus celeritatis gradus.

COROLLARIVM II.

§. 100. Cum celeritas cometae in parabola incedentis unice pendeat ab ipſius a ſole diſtantia (§. 78.) dicta hac diſtantia = MF, erit (§. 77.) Fig. 13.

$$C = m\sqrt{2} : \sqrt{MF}$$

COROLLARIVM III.

§. 101. Cumque porro lapſus parabolici initium ſit nullum (§. 99.) tempora commodius a centro ſolis retro numerantur, loco lapſus aſcenſum parabolicum aſſumendo.

PRO-

PROBLEMA XIX.

§. 102. *Definire temporum interualla in lapsu parabolico, siue tempus, quo cometa a data distantia ad datam quamuis aliam delabitur.*

SOLVTIO.

Sit F centrum solis, FM distantia altera, FN altera, atque quaeritur tempus, quo cometa labitur per spatium MN. Spectentur FM, FN ut radii vectores, MN ut chorda arcus percurrendi, qui hoc casu omni curuedine caret, atque erit (§. 83.)

$$T = \frac{\left(\frac{FN+FM+MN}{2}\right)^{3:2} \pm \left(\frac{FM+FN-MN}{2}\right)^{3:2}}{m3\sqrt{2}}$$

Est vero hoc casu

$$MN = FM - FN$$

adeoque

$$\frac{FN+FM+MN}{2} = FM$$

$$\frac{FN+FM-MN}{2} = FN$$

Quare erit tempus quaesitum

$$T = \frac{FM^{3:2}\ \ FN^{3:2}}{3m\sqrt{2}}$$

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 103. Quodsi ergo quaeratur tempus, quo cometa ex M pertingit ad centrum solis F, erit FN = o, adeoque

$$T = FM^{3:2} : 3m\sqrt{2}$$

COROLLARIVM II.

§. 104. Hinc erit vicissim

$$FM = (18\,T^2 : n^2)^{1:3}$$

siue substituto valore ipsius n pro radio orbis magni = 1, (§. 73.)

$$\log FM = \tfrac{2}{3} \log T - 0{,}9585412.$$

Qua ergo formula in numeris absolutis definietur distantia FM per tempus lapsus parabolici, & vice versa.

SCHOLION.

§. 105. Si in formula corollarii primi pro FM successiue substituantur distantiae planetarum mediae, inuenietur numerus dierum, quibus absoluitur lapsus parabolicus cometae in solem

e ♄	diebus	807,50.
♃	- - .	325,00.
♂	- - -	51,54.
♁	- -	27,40.
♀	- - -	16,85.
☿	- -	6,60.

Lapsus parabolicus cometae per radium orbis magni curatius definitus est $= 27^d, 9^h, 41', 34''$.

 COROL-

COROLLARIVM.

§. 106. Cum lapſus hic ſit dato quouis motu elliptico, parabolico & circulari celerior, numeri dierum, quos hic exhibuimus, denotant ſemimoram cometae breuiſſimam intra orbitam cuiuslibet planetae. Unde mora breuiſſima intra orbitam

♄	eſt dierum	1615,00
♃	- - -	650,00
♂	- - - -	103,[illegible]
♁	- - - -	54,50
♀	- - - - -	33,70
☿	- - - -	1[illegible],20

Ceterum ſi lapſus ponatur hyperbolicus, cogitari poterit mora dato quouis interuallo temporis minor. At cum lapſus parabolicus ſit ellipticorum limes, moram lapſus parabolici breuiſſimam adpellare maluimus. Patet vero hinc cometas, qui ſe nobis ſpectandos ſiſtunt, fere integrum quinquennium intra orbitam Saturni commorari, etſi nobis vix totidem menſes conſpicui ſint.

DEFINITIO II.

§. 107. *Scala celeritatum parabolicarum nobis hic eſt ea, quae ad datam quamuis a ſole diſtantiam celeritatem cometae in parabola incedentis exhibet.*

THEOREMA VI.

§. 108. *Si F denotet centrum ſolis, atque dato cuiuis puncto M adſcribatur numerus dierum vel tempus, quo abſoluitur lapſus parabolicus cometae ex M in*

in F, recta FM hoc modo diuiſa erit ſcala celeritatum parabolicarum.

DEMONSTRATIO.

Etenim quaelibet abſciſſa quantumuis exigua Mm exhibet ſpatiolum lapſus. Cum vero tempora adſcripta ſint, dabitur quoque tempuſculum, quo abſoluitur lapſus per Mm. At vero ſi ſpatiolum Mm per tempus diuidatur, habebitur celeritas. Unde recta FM exhibet celeritates lapſus parabolici. Cum vero celeritas cometae in parabola quacunque incedentis ad eandem a ſole diſtantiam ſit eadem (§. 78.) conſequens eſt, ſcalam FM in uniuerſum exhibere celeritatem motus cometarum parabolici.

SCHOLION.

§. 109. Dantur quoque & alii modi huiuſcemodi ſcalas conſtruendi, at hic, quem iam deſcripſimus ad ſcopum noſtrum adcommodatior eſt.

PROBLEMA XX.

§. 110. *Scalam celeritatum parabolicarum conſtruere.*

SOLVTIO.

Aſſumto radio orbis magni FT = 1, per formulam (§. 104.)

$$\log FM = \tfrac{2}{3} \log T - 0,9585412$$

 pro

pro quouis numero dierum T computetur diſtantia reſpondens FM, haec in rectam FM transferatur ex F in M, atque puncto M adſcribatur numerus dierum pro ea definienda aſſumtus, & ſcala erit conſtructa.

SCHOLION.

Fig. 14. §. 111. Huiuſmodi ſcalam ſiſtit figura decima quarta, quam ad 100 dies extendi. F eſt centrum ſolis, FT radius orbis magni, atque punctum T cadit in $27^d; 9^h; 41'; 34''$ (§. 105.) Quodſi eiuſmodi ſcala conſtruatur, aſſumta diſtantia FT maiori, commode diſtinguentur horarum interualla. Et vel per ſe euidens eſt, in conſtruenda orbita cometae retinendam eſſe diſtantiam FT, ad quam ſcala ipſa conſtructa eſt. Quod ergo, ne in ſequentibus repetendum ſit, hic monuiſſe ſufficiat.

PROBLEMA XXI.

§. 112. *Conſtructa orbita cometae parabolica ſcalae adcommodata, definire tempus, quo datus quilibet ſpatius arcus percurritur.*

SOLVTIO.

Fig. 15. I. Sit parabola AM, eius focus F, radius orbis magni FT. quaeritur tempus, quo percurritur arcus MN. Transferatur FN in Fν, biſecetur νM in g, eritque $Fg = \frac{FN+FM}{2}$. Similiter biſecetur chorda NM in G. Quo
Fig. 14. facto transferatur Fg in ſcalam, ex F in g, ubi

ubi cadit in $18^d; 9^h$. Capiatur ſemilongitudo chordae, eaque in ſcala transferatur ex g in m & n, ubi cadit in 29^d & $6^d; 4^h$. quae tempora ſi ab inuicem ſubtrahantur, remanet $22^d; 20^h$. Hoc itaque temporis interualla percurritur arcus NM.

II. Quodſi arcus percurſus MAn in foco F formet angulum MFn gibbum ſiue duobus rectis maiorem, eodem modo quaeritur ſemiſumma radiorum vectorum $(FM+FN):2$, & dimidium chordae Mn. Illa cadit in diem 16, atque ſemilongitudo chordae ex 16^d antrorſum & retrorſum translata in $0^d; 3^h$ & $43^d; 5^h$. At ob angulum MFn gibbum, ſumenda eſt horum temporum ſumma. Unde $0^d; 3^h + 43^d; 5^h = 43^d; 8^h$ erit tempus quo percurritur arcus MAn.

III. Si quaeratur tempus, quo Cometa ex dato puncto M peruenit in punctum oppoſitum m, hoc caſu radii vectores FM, Fm cum chorda Mm coincidunt, atque tempus breuiſſime inuenitur, ſi tota chorda Mm in ſcalam transferatur, ubi cadet in $39^d; 10^h$. Hoc ergo temporis intervallo cometa percurrit arcum MAm.

DEMONSTRATIO.

Etenim tempus plane idem eſt, quoties ſumma radiorum vectorum & chorda arcus percurſi fuerint eaedem, quacunque utaris parabola (§. 96.) Quare cum ſemiſumma transferatur in Fg, & ſemilongitudo chordae ex g in m & n, erit mn longitudo chordae. Cum iam ſcalae ad-

adſcripta ſint tempora, quibus cometa datum ſpatium mn percurrit, patet, tempus, quo emetitur arcum MN hoc modo definitum iri.

SCHOLION I.

§. 113. Ex formula (§. 104. 110.)

$$\log FM = \tfrac{2}{3}\log T - 0{,}9585412$$

ſiue

$$FM = (18\,T^2 : n^2)^{1:3}$$

patet, *quadratum temporis quo cometa ex dato puncto g motu parabolico in ſolem f defertur eſſe in ratione cubi diſtantiae Fg.* Hinc conſequens eſt, *in ſcala celeritatum parabolicarum tempora octuplo maiora a ſole F eſſe quadruplo remotiora.* Quippe quadratum octenarii aequatur cubo quaternarii. Hinc ergo etſi ſcalae nonniſi dies integri adſcripti ſint, facile tamen definientur horae, ſingula certe ternarum horarum interualla ſiue dierum ſemiquadrantes; *Etenim quartae parti diſtantiae adſcribenda eſt pars temporis octaua.*

SCHOLION II.

Fig. 15. §. 114. *Quo in praxi ſuperflua reddatur chordae NM atque ſpatii γM biſectio, conſultum eſt, ſcalam conſtruere duplo maiorem.* Quo facto ipſa radiorum FM, FN ſumma, totaque chorda NM dicto modo in ſcalam erunt transferendae, ſimulque, quod vel per ſe euidens eſt, hac ratione diſcerni poterunt temporum minutiae duplo minores.

SCHO-

SCHOLION III.

§. 115. Quo breuius atque facilius abſolui poſſit ſcalae conſtructio computari poterit tabella relationem inter tempus & ſpatium lapſus parabolici exhibens (§. 110.) Tabella haec ſimul uſui erit, ubi calculo rem peragere volueris. Eam ideo ad calcem libri adiecimus, cum maxime uniuerſalis ſit ipſius uſus. Ceterum idem de tabella notandum, quod de ſcala notauimus (§. 113.) ſi tempora minora quaerantur.

SCHOLION IV.

§. 116. Ex problemate praeſenti patet, uſum ſcalae eſſe facilem & maxime expeditum, ubi ex ſumma radiorum FM+FN & chorda NM eruendum eſt tempus, quo arcus NM percurritur. At ſi problema inuertatur, atque ex ſumma radiorum & tempore quaeratur chorda, vel ex chorda & tempore ſumma radiorum, vel, quod ſaepius occurrit ex alterutro radio FN, tempore & ſemilatere recto parabolae radius alter FM, & chorda NM, res nonniſi tentando abſolui poterit. Unde quo uſus ſcalae in eruenda orbita cuiuſdam cometae euadat facilior, quaeſtionem ita immutare e re erit, ut ex ſumma radiorum FN+FM & chorda NM quaeratur tempus. Hoc enim cum tempore reapſe obſeruato congruere debet.

THEO-

THEOREMA VII.

§. 117. *Si chorda Mm transeat per focum F, tempus quo percurritur arcus MAN, quem subtendit, unice pendet a longitudine chordae, atque perinde est foci F situs siue ab alterutra extremitate M, m distantia.*

DEMONSTRATIO.

Etenim hoc casu angulus c est = 90°, unde (§. 81.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \cdot (a+b)^{3:2}$$

Est vero $a+b$ = Mm, quare

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \cdot Mm^{3:2}$$

COROLLARIVM I.

§. 118. Quodsi ergo focus F cum initio chordae coincidere ponatur, haec formula itidem exprimit tempus lapsus cometae parabolici in solem (§. 103.)

COROLLARIVM II.

§. 119. Hinc iam vicissim deducetur formula (§. 83.)

$$mT = \left[\frac{(FN+FM+NM)^{3:2}}{2} - \frac{(FN+FM-NM)^{3:2}}{2}\right] : 3\sqrt{2}$$

Fig. 13. Labatur enim cometa ex M in N, tempus, quod impendit erit differentia temporum, quibus ex

ex M & N ad centrum solis delaberetur, adeoque (§. 118.)

$$mT = [FM^{3:2} - FN^{3:2}] : 3\sqrt{2}$$

Est vero

$$FM = \frac{FM+FN+MN}{2}$$

$$FN = \frac{FM+FN-MN}{2}$$

Quare substituendo prodibit

$$mT = \left[\frac{(FM+FN+MN)^{3:2}}{2} - \frac{(FM+FN-MN)^{3:2}}{2}\right] : 3\sqrt{2}$$

Hanc vero formulam uniuersalem esse inde patet, quod tempus T unice a chorda MN & summa radiorum vectorum pendet.

PROBLEMA XXII.

§. 120. *Sint omnia ut in Lemmate duodecimo (§. 38.), inuenire tempus quo percurritur arcus NQ vel MQ, si data sint latera trianguli NFM.* Fig. 6.

SOLVTIO.

Ob chordam NM in G bisectam, & QG axi AF parallelam, recta QG bisecat segmentum NMQ, & recta FG triangulum FNM: Quare mixtilineum NQGF erit pars dimidia sectoris NFMQ. Subtracto itaque triangulo FQG vel idem addendo erit sector

$$NFQ = \tfrac{1}{2} NFMQ - FQG$$

$$MFQ = \tfrac{1}{2} NFMQ + FQG$$

Unde ſi tempora dicantur t, τ, erit (§. 73.)

$$t = (\tfrac{1}{2}NFMQ - FQG) : m\sqrt{2AF}$$
$$\tau = (\tfrac{1}{2}NFMQ + FQG) : m\sqrt{2AF}$$

ſiue dicto tempore, quo percurritur arcus NQM = T, erit

$$t = \tfrac{1}{2}T - FQG : m\sqrt{2AF}.$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}T + FQG : m\sqrt{2AF}.$$

Eſt vero area trianguli

$$FQG = \tfrac{1}{2}QG.GI$$

Sed per naturam parabolae

$$QI = 2\sqrt{(QF - AF)AF}.$$

Unde

$$\frac{FQG}{\sqrt{AF}} = QG\sqrt{(FQ - AF)}$$

Hinc fit

$$\frac{FQG}{\sqrt{AF}} = \sqrt{FQ}.QG.\sqrt{\left(1 - \frac{AF}{FQ}\right)}$$

Sed ob QW, NV axi AF parallelas, erit (§. 4. 38.)

$$\sqrt{\frac{AF}{FQ}} = \sin MNV = MV : NM$$

adeoque

$$\sqrt{\left(1 - \frac{AF}{FQ}\right)} = NV : NM = (a-b) : k$$

Porro eſt

$$NM^2 = 16 FQ.QG$$

ſiue

$$QG.\sqrt{FQ} = \tfrac{1}{4}NM\sqrt{QG}$$

Unde

Unde (§. 45.)

$$\frac{FQG}{\sqrt{AF}} = \frac{a-b}{8}\left[\sqrt{\left(\frac{a+b+k}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{a+b-k}{2}\right)}\right]$$

Dicta iam breuitatis ergo ſumma laterum $a+b = g$ erit

$$6\sqrt{2}.m.t = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{3:2} - 3\left(\frac{a-b}{4}\right).$$
$$\left[\left(\frac{g+k}{2}\right)^{1:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{1:2}\right]$$

&

$$6\sqrt{2}.m.\tau = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{3:2} + 3\left(\frac{a-b}{4}\right).$$
$$\left[\left(\frac{g+k}{2}\right)^{1:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{1:2}\right]$$

PROBLEMA XXIII.

§. 121. *Data ſumma radiorum vectorum $NF + FM = a+b = g$, una cum tempore T, quo percurritur arcus NM inuenire longitudinem chordae $NM = k$.* Fig. 6.

SOLVTIO.

Per ſolutionem primam Problematis XV. eſt

$$Tm.3\sqrt{2} = [g + \tfrac{1}{2}\sqrt{(g^2 - k^2)}].\sqrt{[g - \sqrt{(g^2 - k^2)}]}$$

Unde fit

$$6\sqrt{2}.mT = [2g + \sqrt{(g^2 - k^2)}].\sqrt{[g - \sqrt{(g^2 - k^2)}]}$$

Hinc porro

$$72m^2T^2 = [5g^2 - k^2 + 4g\sqrt{(g^2 - k^2)}].[g - \sqrt{(g^2 - k^2)}]$$

atque porro

$$72m^2T^2 - g^3 - 3gk^2 = -(g^2 - k^2)^{3:2}$$

Fiat

Fiat iam

$$g^2 - k^2 = v^2$$
$$-72m^2 T^2 + 4g^3 = b$$

atque ſubſtitutione facta erit

$$v^3 + 3gv^2 = b$$

Qua ergo aequatione reſoluta dabitur v, atque proinde & k. Adhibita vero methodo ſupra (§. 88.) citata, aequatio haec abit in alterutram ſeriem ſequentem. Erit nempe

$$v^2 = g^2 - k^2 = \frac{b}{3g} - \frac{b^{3:2}}{(3g)^{5:2}} + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{b^2}{(3g)^4}$$
$$- \frac{3.7.\,b^{5:2}}{2.4(3g)^{11:2}} + \frac{3.8.10.\,b^3}{2.4.6.(3g)^7} - \frac{3.9.11.13.\,b^{7:2}}{2.4.6.8.(3g)^{17:2}}$$
$$+ \frac{3.10.12.14.16\,b^4}{2.4.6.8.10(3g)^{10}} - \&c.$$

ſiue

$$v^3 - (g^2 - k^2)^{3:2} = b - 3g.b^{2:3} + \tfrac{2}{3}.3.^2 g^2 b^{1:3}$$
$$- \frac{2.3}{3.6}.3^3.g^3 + \frac{2.5.2.3^4 g^4}{3.6.9\,b^{1:3}} - \frac{2.7.4.1.3^5.g^5}{3.6.9.12.b^{2:3}} + *$$
$$+ \frac{2.11.8.5.2.1.3^7.g^7}{3.6.9.12.15.18b^{4:3}} - \frac{2.13.10.7.4.1.2.3^8 g^8}{3.6.9.12.15.18.21.b^{5:3}}$$
$$+ \&c.$$

Alterutra harum ſerierum ſemper eſt plus minuſue conuergens, at nunquam utraque ſimul.

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 122. Quoniam

$$v^2 = g^2 - k^2$$
$$g = a + b$$

erit

$$v^2 = a^2 + b^2 - k^2 + 2ab$$

Sed per trigonometriam

$$a^2 + b^2 - k^2 = 2ab \operatorname{coſ} 2c$$

Unde

$$v^2 = 2ab(1 + \operatorname{coſ} 2c) = 4 \operatorname{coſ} c^2 . ab$$

Quare (§. 48.)

$$v = 2\sqrt{ab} . \operatorname{coſ} c = 2FE.$$

COROLLARIVM II.

§. 123. Cum ergo ſit

$$v = 2FE$$
$$g = (a+b) = 2FG \text{ (§. 40.)}$$

erit

$$k^2 = g^2 - v^2 = 4(Fg^2 - FE^2)$$

COROLLARIVM III.

§. 124. Hinc porro

$$2.FE^3 + 3.Fg.FE^2 = 8.Fg^3 - 18.m^2.T^2$$

ſiue

$$2ab\sqrt{ab}.\operatorname{coſ} c^3 + 3(a+b)ab \operatorname{coſ} c^2 = a+b)^3 - 18m^2 T^2$$

Plane ut ſupra (§. 80.)

SCHOLION.

§. 125. Alia ſeries, qua directe eruatur k per ſummam laterum $a+b=g$ deducetur ex ea,

qua

qua fupra inuenimus (§. 85.) fi debite conuertatur. Eft vero

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{k^3}{24 \cdot g^{3:2}} - \frac{k^5}{128 \cdot g^{7:2}} - \frac{3 \cdot k^7}{1024 g^{11:2}} - \&c.$$

Diuidatur per $g\sqrt{g}$, atque fiat $4mT : g\sqrt{g} = z$, eritque

$$z = \frac{k}{g} - \frac{k^3}{24 \cdot g^3} - \frac{1}{128} \cdot \frac{k^5}{g^5} - \frac{3}{1024} \cdot \frac{k^7}{g^7} - \&c.$$

Ponatur iam

$$\frac{k}{g} = z + \alpha z^3 + \beta z^5 + \gamma z^7 + \&c.$$

atque erit

$$\frac{k^3}{24 \cdot g^3} = \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{8} \alpha z^5 + \frac{1}{8} \alpha^2 z^7 + \frac{1}{8} \gamma z^9 + \&c.$$
$$+ \frac{1}{8} \beta \,.. + \frac{1}{4} \alpha\beta \,..$$
$$+ \frac{1}{24} \alpha\alpha \,..$$

$$\frac{k^5}{128 \cdot g^5} = + \frac{1}{128} z^5 + \frac{5}{128} \alpha z^7 + \frac{5}{64} \alpha^2 . z^9 + \&c.$$
$$+ \frac{5}{128} \beta \,..$$

$$\frac{3 \cdot k^7}{1024 \cdot g^7} = + \frac{3}{1024} z^7 + \frac{21}{1024} \alpha z^9 + \&c.$$

$$\frac{143 k^9}{98308 g^9} = + \frac{143}{98308} z^9 + \&c.$$

&c.

Hinc

Hinc erit

$$\alpha = \frac{1}{24}$$

$$\beta = \frac{1}{8} \alpha + \frac{1}{128} = \frac{1}{196} + \frac{1}{128} = \frac{5}{384}$$

$$\gamma = \frac{1}{8} \alpha^2 + \frac{1}{8} \beta + \frac{5}{128} \alpha + \frac{3}{1024} = \frac{59}{9216}$$

&c.

adeoque

$$\frac{k}{g} = z + \frac{1}{24} z^3 + \frac{5}{384} z^5 + \frac{59}{9216} z^7 + \&c.$$

fiue fubftituto valore ipfius $z = 4mT : g\sqrt{g}$

$$k = \frac{4mT}{\sqrt{g}} + \frac{8m^3 T^3}{3 \, g^{7:2}} + \frac{40 . m^5 T^5}{3 \cdot g^{13:2}} + \frac{944 . m^7 T^7}{9 \cdot g^{19:2}} + \&c.$$

Cum fit $m = \frac{1}{n} = \frac{1}{116,2648}$ (§. 73.) patet hanc feriem tunc tantum effe conuergentem, cum tempus T fuerit paucorum dierum.

PROBLEMA XXIV.

§. 126. *Data fagitta QG & tempore, quo percurritur arcus NQM, inuenire fummam radiorum FN+FM=g.*

SOLVTIO.

Cum fit (§. 79.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} . (a + b + \sqrt{ab} . \cos c) . \sqrt{(a + b - 2\sqrt{ab} . \cos c)}$$

atque

atque

$$\sqrt{ab}.\cos c = FE = Fg - 2QG = \frac{a+b}{2} - 2QG$$

erit

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(\tfrac{1}{2}(a+b) - 2QG).\sqrt{4QG}$$

Unde

$$a+b = g = \frac{mT\sqrt{2}}{\sqrt{QG}} + \tfrac{4}{3}QG$$

PROBLEMA XXV.

Fig. 5. §. 127. *Dato semilatere recto & ordinata NK inuenire tempus a perihelio, siue quo cometa percurrit arcum AN.*

SOLVTIO.

Sit semilatus rectum $= 2\,AF = s$, ordinata $NK = y$, erit area sectoris AFN

$$A = (y^3 + 3s^2y) : 12s$$

Dicto tempore $= T$, erit (§. 73.)

$$T = A : m\sqrt{s}$$

adeoque

$$T = \frac{y^3 + 3s^2y}{12ms^{3:2}}$$

COROLLARIVM I.

§. 128. Hinc erit

$$y^3 + 3s^2y = 12ms^{3:2}T$$

quae aequatio, ponendo breuitatis ergo

$$12ms^{3:2}T = q$$

abit

abit in seriem

$$y = \frac{q}{3s^2} - \frac{q^3}{3^4.s} + \frac{3q.^5}{3^7.s^{14}} - \frac{3.8.q^7}{2.3^{10}.s^{20}} + \frac{3.11.10.q^9}{2.3.3^{13}.s^{26}} - \frac{3.14.13.12.q^{11}}{2.\ 3.\ 4.3^{16}.s^{32}} + \&c.$$

COROLLARIVM II.

§. 129. Similiter erit per regulam CARDANI

$$\frac{y}{\sqrt{s}} = \sqrt[3]{[6mT + \sqrt{(36m^2T^2 + s^3)}]} + \sqrt[3]{[6mT - \sqrt{(36m^2T^2 + s^2)}]}$$

COROLLARIVM III.

§. 130. Cum sit

$$AK = y^2 : 2s$$
$$NF = y^2 : 2s + \tfrac{1}{2}s$$

data ordinata y, facile dabitur abscissa AK, & radius vector siue distantia heliocentrica FN, atque hinc porro angulus NFH, cum sit

$$\sin NFK = KN : FN$$

PROBLEMA XXVI.

§. 131. *Data distantia perihelii AF una cum radio vectore AN, inuenire tempus a perihelio.* Fig. 1.

SOLVTIO.

Cum sit in genere (§. 79.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(a+b+\sqrt{ab}.\cos c).\sqrt{(a+b-2\sqrt{ab}.\cos c)}$$

erit

erit hoc casu

$$a = FN$$
$$b = AF$$
$$\sqrt{ab} = FS$$
$$c = AFS$$

unde

$$\sqrt{ab}.\cos.c = AF$$

Quare

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(FN+2AF).\sqrt{(FN-AF)}$$

COROLLARIVM I.

§. 132. Hinc iterum erit

$$18m^2T^2 = FN^3+3FN^2.AF-4AF^3$$

siue

$$FN^3+3AF.FN^2 = 18m^2T^2+4AF^3$$

COROLLARIVM II.

§. 133. Cum per naturam parabolae sit

$$FN = AF+AK$$

erit substitutione facta

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(AK+3AF)\sqrt{AK}$$

unde

$$AK^3+6AK^2.AF+9AK.AF^2 = 18m^2T^2$$

PROBLEMA XXVII.

Fig. 1. §. 134. *Data distantia perihelii AF atque angulo NFA, inuenire tempus a perihelio.*

SOLV-

SOLVTIO.

Dicatur $AF = f$, $AFS = SFN = c$, atque erit (§. 2.)

$$AS = f.\text{tang}\,c = \tfrac{1}{2}NK = \tfrac{1}{2}y$$

unde

$$y = 2f\,\text{tang}\,c$$

siue dicto semilatere recto s, erit

$$y = s.\text{tang}\,c$$

Est vero (§. 127.)

$$T = \frac{y^3+3s^2y}{12ms^{\frac{3}{2}}}$$

Quare substituendo

$$T = \frac{s\sqrt{s}}{12m}(\text{tang}\,c^3+3\text{tang}\,c)$$

COROLLARIVM.

§. 135. Hinc erit per regulam CARDANI

$$\text{tang}\,c\sqrt{s} = \sqrt[3]{[6mT+\sqrt{(36m^2T^2+s^2)}]}+\sqrt[3]{[6mT-\sqrt{(36m^2T^2+s^2)}]}$$

PROBLEMA XXVIII.

§. 136. *Inuenire distantiam perihelii siue semilatus rectum parabolae in qua cometa diutissime intra orbitam dati cuiusdam planetae commoretur.*

SOLVTIO.

Sit F centrum solis, AM orbita cometae, A Fig. 12.
eius perihelium, MP orbita cometae, tempus,

 quo

quo percurritur arcus MA eſt ſemimora intra orbitam MP. Quare erit (§. 132.)

$$18m^2T^2 = FM^3 + 3FM^2.AF - 4AF^3$$

adeoque differentiando

$$0 = 36m^2\,TdT = 3FM^2.dAF - 12AF^2.dAF$$

unde

$$4AF^2 = FM^2$$
$$FM = 2AF$$

Debet ergo diſtantia planetae helicentrica una eſſe ſemilatus rectum parabolae, quae moram cometae intra orbitam planetae reddat maximam.

PROBLEMA XXIX.

§. 137. *Inuenire tempus morae maximae cometae in parabola incedentis intra datam planetae orbitam.*

SOLVTIO.

Cum ſit

$$18m^2T^2 = FM^3 + 3FM^2.AF - 4AF^3$$

atque pro mora maxima

$$\tfrac{1}{2}FM = AF$$

erit ſubſtitutione facta

$$18m^2T^2 = FM^3(1 + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}) = 2FM^3$$

unde

$$T = \tfrac{1}{3}n.FM^{3:2}$$

Quae eſt ſemimora maxima, unde mora integra erit $\frac{2}{3}n.FM^{3:2}$

COROLLARIVM.

§. 138. Quoniam tempus morae breuiſſimae eſt (§. 103. 105.)

$$T = \tfrac{1}{3}n\sqrt{2}.FM^{3:2}$$

patet,

patet, *moram maximam ad minimam eſſe in ratione* $\sqrt{2}$ *ad* 1.

SCHOLION I.

§. 139. Quodſi pro diſtantia FM ſubſtituantur diſtantiae planetarum mediae, tempus morae maximae cometae in parabola incedentis erit intra orbitam

♄	dierum	2282,66.
♃	- -	919,28.
♂	- - -	145,80.
♁	- -	77,50.
♀	- - -	47,66.
☿	- -	18,67.

SCHOLION II.

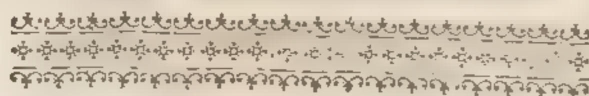
§. 140. Utraque mora cum tempore planetae periodico conferri poterit hoc modo. Vidimus (§. 75.) tempus periodicum eſſe

$$= \frac{\pi}{m}.FM^{3:2}$$

Sed mora breuiſſima $= \dfrac{\sqrt{2}}{3m}.FM^{3:2}$

maxima $= \dfrac{2}{3m}.FM^{3:2}$

Unde tempus planetae periodicum erit ad moram cometae breuiſſimam $= 3\pi : \sqrt{2} = 20 : 3$, ad maximam vero $= 3\pi : 2 = 33 : 7$.



PROPRIETATES INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM.

SECTIO III.

Perlustrantur motus cometarum adparentiae, atque varii exponuntur modi orbitam veram ex obseruationibus determinandi, si ista sit parabolica.

DEFINITIO III.

§. 141. *Notae characteristicae orbitae cometarum siue differentiae specificae sunt illa capita, quibus orbita cuiuslibet cometae a cunctis ceteris discernitur.*

SCHOLION I.

§. 142. Duo sunt capita, in quibus singulae orbitae congruunt. Primo enim oportet sit sectio conica, atque secundo haec ita posita est, ut eius focus cum centro solis coincidat. Contra ea dantur sex capita, quibus singulae orbitae ab inuicem sunt distinguendae, suntque

1°. *Distantia peribelii a sole.*

2°. *Ratio inter banc distantiam & semilatus rectum*, siue quod eodem redit, *tempus periodicum*, si orbita sit elliptica vel circularis.

3°. *Tempus, quo cometa fuit in peribelio, vel in dato orbitae suae puncto baesit.*

4°. *Inclinatio orbitae ad planum eccliptices.*

5°. *Situs lineae nodorum siue longitudo nodi ascendentis beliocentrica.*

6°. *Elongatio axeos orbitae a linea nodorum, siue longitudo peribelii beliocentrica.*

Prima duo capita ipsam sectionis conicae speciem eiusque magnitudinem veram, caput tertium epocham, reliqua tria situm orbitae ratione eccliptícae suppeditant, ut adeo si singula adhibeantur, orbita cometae ab omnibus aliis distinguatur.

SCHOLION II.

§. 143. Ad definienda sex ista capita tres requiruntur obseruationes siue tria loca cometae geocentrica, longitudines puto & latitudines e tellure obseruandae. Constat vero partem orbitae quam cometa percurrit, dum se terricolis spectandum sistit, admodum esse exiguam. Hinc fit, ut caput secundum siue tempus periodicum ex tribus obseruationibus sibi admodum vicinis vix definiri possit. Quodsi vero redeat cometa iam pridem obseruatus, datur tempus periodicum, atque ex hoc curatius definitur longitudo axis maioris ellipseos. (§. 72.)

SCHOLION III.

§. 144. Porro obseruationibus constat, orbitas cometarum, si quidem ellipticae sint, admodum esse oblongas, ut adeo exigua illa pars, quam

quam tempore viſibilitatis percurrunt, absque notabili errore cum parte orbitae parabolicae confundatur. Etenim cum tempus periodicum plerumque ſit plurium ſaeculorum, aphelium non poteſt non a ſole eſſe remotiſſimum. Contra ea perihelia eorum cometarum, qui nobis ſunt viſibiles, fere ſemper cadunt intra orbitam telluris, adeoque ſoli ſunt maxime vicina, quo fit ut ratio inter diſtantiam perihelii a ſole & ſemilatus rectum ab ea fere non differat, quae obtinet, ſi orbita fuerit parabolica.

THEOREMA VIII.

Fig.15. §. 145. *Si cometa in parabola incedens obſeruetur in utroque nodo N, n, e tellure in E, e haerente, dabitur ſitus & longitudo lineae nodorum, diſtantia perihelii a ſole & ſitus axeos parabolae, ſed incognita remanet orbitae inclinatio.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ob data puncta eccliptieae, quae cometa e tellure traiicere viſus eſt, datur ſitus rectarum EN, en. Porro ob datum temporis interuallum, quo cometa ex N peruenit in n, dabitur longitudo lineae nodorum Nn (§. 117.) eritque

$$Nn^{3:2} = 3\sqrt{2}.m.T$$

Quare quaeſtio eo redit, ut per centrum ſolis F agatur recta cuius pars Nn a rectis EN, en poſitione datis abſciſſa ſit datae longitudinis. Hac vero ducta dabitur ſitus axeos & diſtantia perihelii AF, adeoque tota parabola. Contra ea cum puncta obſeruata N, n ſint in plano eclip-

eclipticae, ex iis ſolis angulus inclinationis definiri nequit, quare inclinatio remanet indefinita.

COROLLARIVM.

§. 146. Quodſi ergo accedat obſeruatio tertia non modo dabitur inclinatio orbitae, verum & cum quadruplex ſit problematis ſolutio, definiri poterit, quaenam reapſe obtineat.

SCHOLION.

§. 147. Caſus huius theorematis utique rariſſimus eſt. Plerumque enim vel nodorum alteruter nimis eſt a tellure remotus, vel viſibilitati cometae in ipſo haerentis obſtat ſolis vicinitas.

THEOREMA IX.

§. 148. *Si cometa e tellure bis obſeruetur, atque in alterutra obſeruatione verſetur in perihelio orbitae parabolicae, dabitur tota orbita eiuſque ſitus.*

DEMONSTRATIO.

Aſſumta enim diſtantia geocentrica pro ea obſeruatione, quae tempore celebrati perihelii facta eſt, dabitur diſtantia heliocentrica adeoque diſtantia perihelii & ſitus axeos. Unde hoc ipſo dabitur orbita atque elongatio cometae a perihelio tempore obſeruationis alterius, ſiue punctum N. Quodſi ergo parabola circa axin rotetur, punctum N incidere debet in

 rectam

rectam e fecundo loco telluris in fecundum locum cometae ductam, cuiufque pofitio data eft. Quod fi fuerit, diftantia geocentrica affumta vera eft. Sin minus alia affumenda, donec huic conditioni fatisfiat. Quod cum neceffario alicubi fieri debeat, confequens eft problema effe determinatum, atque duas obferuationes determinandae orbitae cometae fufficere, fi ifte tempore alterutrius obferuationis extiterit in perihelio.

SCHOLION.

Fig.6. §. 149. Theorema hoc ad quaelibet duo alia cometae loca N, M extenditur, fi detur alteruter angulorum RMF, RNF, fub quibus orbita radios vectores FM, FN fecat.

THEOREMA X.

§. 150. *Si in globo caelefti per locum folis & cometae geocentricum ducatur circulus fphaerae maximus, hic fimul tranfibit per locum telluris & cometae heliocentricum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim circulus ifte refert fectionem fphaerae caeleftis a plano factam, quod tranfit per centra folis, telluris atque cometae. Unde cum rectae, quae iungunt ifta centra fint in hoc plano, atque ad fixas ufque productae ibidem referant loca telluris & cometae e fole, nec non loca folis & cometae e tellure vifa, conftat propofitum.

COROL-

COROLLARIVM.

§. 151. Eandem ob cauffam, cum cometa moueatur in plano, quod per centrum folis tranfit, loca fingula cometae heliocentrica erunt in circulo fpharae maximo.

SCHOLION.

§. 152. Ufui effe poterit hoc theorema, fi inueniatur formula concinna rationem inter angulos NFQ, QFM & tempora exhibens quibus percurruntur arcus NQ, QM. Etenim hi anguli funt arcus circuli, qui loca cometae heliocentrica refert, a circulis e locis folis per loca cometae geocentrica ductis intercepti. Fig.7.

PROBLEMA XXX.

§. 153. *Si dentur quatuor obferuationes cometae exiguo interuallo temporis ab inuicem remotae, orbitae fitum & magnitudinem approximando definire, fi haec fuerit parabolica.*

SOLVTIO.

Quoniam ob exigua temporum interualla arcus a cometa a prima obferuatione ad quartam percurfus inftar rectae haberi poteft, aequabili celeritate percurfa, orbita cometae fiue quatuor eius loca obferuata concipiantur in planum eccliptices proiecta, fintque H, I, K, L. Porro rectae e locis telluris in loca cometae Fig.8.
ductae fint EH, EI, AK, AL; quae cum referant cometae longitudines geocentricas, pofitione funt datae. Unde ergo delabimur ad

Lem-

Lemma XVIII, (§. 51.) cum ducenda ſit recta HL talis, quae a rectis AL, AK, EI, EH poſitione datis in tres partes LK, KI, IH temporibus proportionales ſecetur.

Hac recta conſtructa retineantur puncta extrema H, L, atque in ſubſidium vocatis latitudinibus cometae geocentricis, erectis e punctis H, L perpendicularibus, definientur duo puncta orbitae cometae a veris haud ita multum abhorrentia. Unde per Lemma V. dabitur tota orbita (§. 26.). Cumque itidem hinc detur tempus per Problema XV. (§. 83.) experiri datur, an cum tempore obſeruato congruat, ſiue plus minuſue ab eo differat. Poſterius ſi fuerit, ut vel neceſſario eſſe ſolet, retenta orbita hoc modo conſtructa quaerantur in ea loca cometae, in quibus iſte eſſe debuiſſet tempore utriuſque obſeruationis intermediae, ſi tempora obſeruata in computata Fig.9. mutentur. Quo facto dabitur quadrilaterum EFGH, ab eo quod vera cometae loca efformant longe minus diſcrepans ac recta primo aſſumta. Hoc vero in eclipticam eſt proiiciendum, atque retentis angulis & ratione laterum quaeſtio eo reducitur, ut quadrilaterum ſimile quatuor rectis AE, AG, BF, BH poſitione datis inſcribatur. Quod fiet ope Lemmatis IX. (§. 54.). Retentis iterum duobus punctis extremis EH eodem modo quaeratur ſitus orbitae, quae a vera longe minus aberrabit. Hac ratione cum ulterius progredi liceat, orbita approximando definietur qualis reipſa eſt.

SCHO-

SCHOLION.

§. 154. Quod in hoc problemate aſſumitur, cometam nempe percurrere rectam aequali celeritate, idem alio modo aſſumere licet. Sint duo cometae loca extrema N, M ducatur Fig.7. chorda NM, atque haec ponatur a cometa percurſa, ita ut dum fuerit in dato quouis loco orbitae intermedio Q, ducta FQ, locus iſte transferatur in E. At vero duo hinc enaſcuntur incommoda. Primo enim punctum E aliam habet longitudinem & latitudinem geocentricam ac locus cometae reapſe obſeruatus Q. Porro tempora quibus percurruntur arcus MQ, QM partibus chordae abſciſſis ME, EN haud perfecte ſunt proportionalia. Patet tamen ex Lemmate XVII. (§. 49. 50.) rationem inter areas ſectorum NFQ, QFM & abſciſſas NE, EM perparum differre, quoties angulus NFM 20 aut 30 gradus non excedat. Quare poſteriori incommodo ita obuiam ire datur, ut primo abſciſſae NE, EM ſumantur eſſe temporibus proportionales. Quo ipſo proxime definietur orbita, atque ratio inter abſciſſas NE, EM curatius definiri poterit, quo calculus inſtaurari queat. Priori incommodo variae adferri poſſunt medelae. Aut enim, quod fecit ſummus EVLERVS ex diſtantia inter utramque extremam NF, MF media atque tentando definienda, atque ex temporibus quibus percurruntur arcus MQ, QN proxime determinabitur ſagitta QE, ex lapſu corporum in ſolem. Quodſi tempora iſta fere ſint aequalia, dabitur ſagitta maxima QG = QE per formulam

Fig. 6. Fig. 7. Iam §. 92. qua ceu proxime vera uti licet. At cum puncto E eatenus tantum opus ſit, quatenus recta ex eo in centrum telluris ducta in planum ecliptices proiicienda eſt, exactius voto ſatisfiet, ſi in vicem plani ecliptices eligatur aliud planum ſcopo adcommodandum. Facile vero patet utramque rectam e centro telluris in puncta Q & E ductam atque in planum iſtud proiectam coincidere debere. Huic vero fini ſatisfaciet quodlibet planum, quod normaliter tranſeat per planum in quo eodem tempore verſantur ſol, cometa & tellus. Quod ut fiat euidentius, unaque exponatur methodus orbitam cometae definiendi, ſequens adponemus

PROBLEMA XXXI.

§. 155. *Datis tribus cometae in parabola incedentis locis geocentricis una cum interuallo temporum, inuenire orbitae ſitum & magnitudinem.*

SOLVTIO.

Fig. 16. Sint E, C, D tria cometae loca, perpendicularium ope in planum ecliptices proiecta. Tellus eodem tempore ſit in A, T, B. In locum telluris medium T e ſole S agatur recta ST, atque ad hanc normalis TR. Ad hanc ex utroque loco telluris extremo A, B demittantur normales $A\alpha$, $B\epsilon$, ſimiliterque e locis cometae E, C, D normales EPG, CQK, DRH. Sint porro PG, QK, RH aequales eleuationi cometae in E, C, D ſupra planum eclipticae, atque agantur rectae αH, TK, ϵG.

Hac

Hac ratione planum αRHG ſpectari poterit ceu ad planum ecliptices αRDS, & in ſpecie ad rectam TS normale, atque referet locorum telluris & cometae α, T, ϵ, G, K, H proiectionem orthographicam. Patetque rectam TK non modo eſſe proiectionem rectae e loco telluris medio T in locum cometae puncto C normaliter imminentis, verum & lineae e centro ſolis S in eundem hunc cometae locum ductae, adeoque totius plani, in quo eodem tempore commorantur ſol, cometa, tellus.

Quoniam rectae AD, TC, BE ſunt longitudines cometae geocentricae, TS longitudo ſolis vel telluris tempore obſeruationis mediae, BS, AS longitudines ſolis tempore obſeruationum extremarum, hinc dabuntur

$$\alpha T = AS.\sin TSA$$
$$\epsilon T = BS.\sin TSB$$

Porro anguli ADR, TCQ, BEP ſunt differentiae inter longitudines cometae & longitudinem ſolis tempore obſeruationis mediae, quare ſunt dati, eritque

$$\epsilon P = BE.\sin BEP$$
$$TQ = TC.\sin TCQ$$
$$\alpha R = AD.\sin ADR$$

Sint porro latitudines cometae geocentricae in B, T, A $= \lambda, \lambda', \lambda''$, erit

$$PG = BE.\tang\lambda$$
$$QK = TC.\tang\lambda'$$
$$RH = AD.\tang\lambda''$$

Unde iam habetur

$$\tang G\epsilon P = \tang\lambda : \sin BEP$$
$$\tang KTQ = \tang\lambda' : \sin TCQ$$
$$\tang H\alpha R = \tang\lambda'' : \sin ADR$$

Dan-

Dantur itaque in plano normali aſſumto

rectae αT, $T\beta$, $\alpha\beta$

anguli $G\beta P$, KTQ, $H\alpha R$

Vocetur ergo

$$\alpha T = g \quad G\beta P = \beta$$
$$\beta T = b \quad KTQ = \tau$$
$$H\alpha R = \alpha$$

Nectantur puncta G, H, eritque recta GH proiectio chordae, cuius arcum percurrit cometa interuallo temporis utriusque obſeruationis extremae. Cumque TK ſit proiectio radii vectoris medii, erit KL proiectio ſagittae, & tempora proxime ſunt in ratione

$$GL : LH = PO : OR = p : q.$$

Quodſi peracto calculo eundem inſtaurare operae pretium ſit, haec ratio facile curatius definietur.

Fiat iam

$$TO = x$$
$$PO = y$$

erit

$$OR = yq : p$$

Porro

$$OL = x . \operatorname{tang}\tau$$
$$\alpha R = g + x + qy : p$$
$$\beta P = x - b - y$$
$$HR = (g + x + qy : p)\operatorname{tang}\alpha$$
$$PG = (x - b - y)\operatorname{tang}\beta$$

Sed

$$(OL - GP) : (RH - OL) = p : q$$

Quare

Quare

$$qx\operatorname{tang}\tau + q(x \;\; b - y)\operatorname{tang}\beta = p\left(g + x + \frac{qy}{p}\right) . \operatorname{tang}\alpha - px\operatorname{tang}\tau.$$

ſiue debita reductione facta

$$y = \frac{(q+p)\operatorname{tang}\tau - q\operatorname{tang}\beta - p\operatorname{tang}\alpha}{q(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta)} . x + \frac{qb\operatorname{tang}\beta \quad pq\operatorname{tang}\alpha}{q(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta)}$$

Haec formula in numeris eſt computanda, unde faciemus breuiſſime

$$y = \gamma x + \delta$$

Datur ergo $y = PO$ per $x = TO$. Unde porro erit

$$\beta P = x - \gamma x - \delta - b$$
$$\alpha R = x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p} + g$$

Quare

$$PE = TW = (x - \gamma x - \delta - b)\cot BEP + \beta B$$
$$RD = TX = \left(x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p} + g\right)\cot ADR + A\alpha$$

Cum vero & hae formulae computandae ſint in numeris, ita faciemus

$$\frac{TW + TX}{2} = TF = \varkappa x + \mu$$
$$TX - TW = WX = \nu x + \varrho = EV$$
$$FS = TS - TF = \varphi x + \omega$$

Porro

Porro eſt

$$WE = TP = x - \gamma x - \delta$$

$$XD = TR = x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p}$$

Hinc

$$VD = \frac{q+p}{p}(\gamma x + \delta) = \varepsilon x + \eta \text{ breuitatis ergo}$$

Sed

$$VE = \nu x + \varrho$$

Unde

$$ED^2 = (\varepsilon^2 + \nu^2)x^2 + (2\varepsilon\eta + 2\nu\varrho)x + \eta^2 + \varrho^2$$

Porro

$$GP = (x - \gamma x - \delta - b)\,\text{tang}\,\epsilon$$

$$RH = \left(x + \frac{\gamma q x}{p} + \frac{\delta q}{p} + g\right)\text{tang}\,\alpha$$

Unde differentia altitudinum cometae extremarum RH—GP efferri poterit per

$$rx + s$$

Dabitur ergo hinc quadratum longitudinis chordae, quam cometa in orbita ſua percurrit

$$ED^2 + (RH - GP)^2 = Ax^2 + Bx + C$$

Cumque ſit

$$WE = x - \gamma x - \delta$$

$$XD = x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p}$$

erit

$$\frac{WE + XD}{2} = FZ = Dx + E\,;$$

Sed

$$FS = \varphi x + \omega$$

Quare

Quare dimidium ſummae diſtantiarum cometae extremarum a ſole erit

$$= \sqrt{[(\varphi x + \omega)^2 + (Dx + E)^2 + LO^2]}$$

Ex hac diſtantia & longitudine chordae & tempore quo ab inuicem diſtant obſeruationes extremae dabitur x per problema XV. (§. 83.)

Quodſi chorda haud fuerit magna erit proxime

$$Ax^2 + Bx + C = \frac{8m^2T^2}{\sqrt{[(\varphi x + \omega)^2 + (Dx + E)^2 + LO^2]}}$$

Quae eſt aequatio ſexti gradus.

Inuenta iam $x = TO$, facile dabitur $y = PO$, atque proinde OR, & cunctae quantitates, quae ad definiendum ſitum chordae ED in eclipticam proiectae adeoque & chordae verae quicquam faciunt. Cumque radii vectores extremi ſint

$$b = \sqrt{(SW^2 + WE^2 + PG^2)}$$

$$a = \sqrt{(SX^2 + XD^2 + RH^2)}$$

tota orbita determinabitur per Lemmata VIII, X, XI. huiuſque Corollarium I, &c.

Aliter, conſtructione.

Quoniam prolixiori hoc calculo orbita cometae tantummodo proxime determinatur, niſi eum inſtaurare volueris, conſtructione rem omnem breuius atque commodius abſoluere licet.

Sit ergo S centrum ſolis, T locus telluris tempore obſeruationis mediae, B, A eiuſdem loca tempore obſeruationis primae & tertiae. Ex datis cometae longitudinibus geocentricis

ducen-

ducentur rectae TC, AD, BE. Porro ducta TR ad TS normali, demittantur Aα, Bϵ ut in solutione prima, similiterque vel calculo vel constructione definientur anguli GϵP, KTQ, HαR, eritque ut antea TK proiectio rectarum e centro solis & telluris in locum cometae medium ductarum.

Assumatur iam in recta TK punctum quodlibet L, quod referat punctum intersectionis chordae a cometa percursae & radii vectoris medii in ipsa cometae orbita. Quodsi hoc punctum L forte fortuna rite fuerit assumtum, vera quoque determinabitur cometae orbita, sin minus innotescet aberratio, atque aliud tentando erit eligendum. Ipsa vero constructio pro singulis est eadem, quare ne figura nimium quantum oneretur rectis, situm puncti L assumimus verum, eundemque ceu incertum tractabimus.

Per punctum L agatur recta GLH talis, ut partes GL, LH sint in ratione temporum, atque e punctis G, H demittantur GPE, HRD ad rectam αR normales. Quo facto triangula ϵGP, αHR in planum eccliptices erunt translata, eruntque ϵEP, αDR, atque ducta ED erit chorda a cometa percursa in planum eccliptices proiecta.

E puncto assumto L agatur LZ ad αR normalis, eritque

$$GL:LH=EZ:ZD$$

atque puncta S, Z, C erunt in una eademque recta, quae radium vectorem medium refert in ecclipticam proiectum, si punctum L rite fuerit assumtum. At cum hoc incertum sit, nectantur loca telluris A, B, atque e puncto intersectionis t agatur recta tZ per punctum Z. Haec recta talis erit, ut quicunque fuerit situs chordae a cometae percursae atque in ecclipticam proiectae, recta tZ eam secet in eadem ratione in qua secta est recta EZD, adeoque proxime in ratione temporum.

Assumtis itaque in recta tZ punctis quibusuis Z facile ducentur totidem rectae EZD a rectis AD, BE, tZ in data ratione temporum sectae.

Eiusmodi recta cum sit ED, ope latitudinum geocentricarum facile e punctis E, D erigentur normales, quae erunt = GP, HR, atque harum summitates longitudine chordae a cometa percursae inter se distare debent, simulque summitatum istarum a centro solis S distantia referet radios vectores extremos. His vero distantiis inuentis ope formularum Problematis XV. (§. 83.) vel ope scalae celeritatum parabolicarum (§. 112. seqq.) definietur tempus, quo cometa percurrere debuisset chordam ope puncti assumti Z erutam. Quodsi ergo hoc tempus cum tempore inter primam & tertiam obseruationem elapsum congruat, punctum Z rite fuit assumtum, sin minus, notetur differentia, atque in recta tZ successiue assumantur alia puncta vicem ipsius Z subitura. Unde totidem dabuntur temporis obseruati & constructione eruti differentiae. Quo facto distantiae tZ spectentur ut abscissae, atque differentiae temporum ipsis instar ordinatarum adplicentur, quo duci possit curua, quae re-

ctam tZ in eo loco secabit, cui verum punctum Z respondet. Per se vero patet puncta Z ita esse assumenda ut differentiae temporum erutae sint & positiuae & negatiuae.

Inuento iam vero puncto Z, constructionem instaurando ducetur vera chorda [illegible] a LD, qua data facillime absoluetur constructio totius orbitae.

Hac vero constructa facile examini subiicietur ratio inter partes rectae GL, LH, an temporibus sint proportionales, vel an notabilius differant. Quodsi differant, vera ratio curatius definietur, atque constructio [illegible] instaurari poterit, quo exactius eruatur orbitae magnitudo & situs.

SCHOLION I.

§. 156. Quod constructionem hanc reddit prolixiorem est orbitae cometae ad eclipticam inclinatio. Hoc enim fit, ut altitudines cometae supra puncta E, D duplici modo in planum eclipticae sint transferendae, quo determinari possit chordae a cometa percursae longitudo, atque a sole S distantia siue radii vectores extremi. Ceterum prolixitas ista compendio, quod in computanda temporum differentia suppeditat scala celeritatum parabolicarum, magna ex parte compensatur.

SCHOLION II.

§. 157. Quoniam in solutione posteriori punctum Z tentando est quaerendum, eius quaedam criteria in medium proferre haud inutile erit. Huc facit Theorema III. (§. 76. seqq.) quo ex distantia cometae heliocentrica definitur ipsius celeritas, atque cum celeritate planetae ad eandem distantiam in circulo gyrantis confertur. Quoniam arcus vel chordae a prima obseruatione ad tertiam percursae plerumque sunt exiguae, chorda a cometa percursa cum ea quam eodem tempore percurrit tellus, quaeque est AB quodammodo conferri poterit. Ponamus v. gr. cometam esse in T, atque facile patet, chordam ab eo percursam debere esse proxime $=AB.\sqrt{2}$. (§. cit.) quod esse nequit, quia cadere debet intra rectas AD, BE. Quodsi punctum Z assumatur intra rectam tI, cometae a sole distantia minuitur, adeoque augetur longitudo chordae, quam percurrere debuisset. Cum vero rectae AD, BI in I coincidant, spatium longe fit angustius, eo ergo minus cometa intra tI erit locandus, atque facile patet punctum Z debere esse puncto I longe remotius. Assumto puncto Z situs chordae proiectae ED oculo solo iudice plerumque proxime colligitur, eiusque longitudo cum AB & distantia a sole confertur. Similiter rectae AD, 6E, tZ in I ita sunt positae, ut quae media esse deberet extrema sit, quo ipso situs puncti K ibidem necessario euadit impossibilis.

PROBLEMA XXXII.

§. 158. *Si orbita cometae parabolica iam proxime fuerit definita, eandem curatius definire.*

SOLVTIO.

Quoniam proxime in numeris dantur diſtantiae cometae geocentricae curtatae AD, TC, BE, ponemus ſingulas eſſe debito minores, atque differentiam qua augendae ſunt, ut in veras abeant, ita eſſe exiguam, ut dignitates earum prima ſuperiores abiici tuto poſſint. Hac ratione inſtar differentialium eas tractare licet, computo in numeris abſoluendo debite adiiciendarum. Ipſe vero computus ita erit inſtituendus, ut ex aſſumtis diſtantiis eruantur tempora intra primam & ſecundam, ſecundam & tertiam, tertiam denique & primam obſeruationem elapſa. Quo facto tempora computata cum obſeruatis conferri poterunt, atque hac ratione deueniemus ad tres aequationes, quibus eruentur differentiae diſtantiarum aſſumtarum & verarum AD, TC, BE, aſſumtis addendae vel ab iis ſubtrahendae, prout poſitiuae vel negatiuae fuerint.

Computum vero, quo eruentur iſtae aequationes, exemplo illuſtrabimus ſequentem in modum.

Fig. 17. Sit S ſol, T, t loca telluris, punctis K, k immineant loca cometae C, c, rectae TK, tk erunt eiusdem longitudines & anguli CTK, ctk erunt latitudines geocentricae. Producantur KT, kt in A, atque agatur AS, & CP ipſi Kk parallela. Fiat iam

$AT = \alpha$	$AK = K$	$CTK = C$	$TS = T$
$At = \beta$	$Ak = k$	$ctk = \gamma$	$tS = \tau$
$TAt = \omega$	$TK = \grave{K}$	$CTS = e$	
	$tk = \grave{k}$	$ctS = f$	

atque

atque erit

$$Cc^2 = K^2 + k^2 - 2Kk\cos\omega + \grave{K}^2 \text{tang}\, C^2 + \grave{k}^2 \text{tang}\, c^2 - 2\grave{k}\grave{K}.tc.tC$$

Porro eſt

$$CS^2 = T^2 + \grave{K}^2 \sec C^2 - 2T\grave{K}.\sec C.\cos e$$
$$cS^2 = \tau^2 + \grave{k} \sec c^2 - 2\tau\grave{k} \sec c.\cos f$$

Hae formulae computandae ſunt in numeris. At vero cum ipſis adiicienda ſint differentialia, notabimus, quantitates K, $\grave{K}$, k, $\grave{k}$ ſpectandas eſſe ceu variabiles, atque facile patet, ob

$$K = \grave{K} + \alpha$$
$$k = \grave{k} + \beta$$

differentialia dK, $d\grave{K}$, nec non dk, $d\grave{k}$ eſſe eadem, quare differentiando erit

$$d(Cc) = (K + \grave{K}tC^2 - k\cos\omega - \grave{k}tc.tC)dK : Cc + (k - K\cos\omega + \grave{k}tc^2 - \grave{K}tc.tC)dk : Cc$$
$$d(CS) = (\grave{K}\sec C^2 - T.\sec C.\cos e)dK : CS$$
$$d(cS) = (\grave{k}\sec c - \tau\sec c.\cos f)dk : cS$$

His iterum in numeris computatis, contractiores euadunt, eritque

$$d(Cc) = mdK + ndk$$
$$d(CS) = pdK$$
$$d(cS) = q.dk.$$

At iam per CS, cS, cC dabitur tempus per formulam (§. 83.) eritque

$$3\sqrt{2}.m7 = \left(\frac{CS + cS + cC}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{CS + cS - cC}{2}\right)^{3:2}$$

Sed cum diſtantiae geocentricae curtatae TK, tk aſſumtae a veris differant, tempus 7, quod dat haec formula ab obſeruato differet. Quare,

re, ut τ fit tempus obſeruatum, formulae adiiciendum erit differentiale, eritque

$$12m\tau = \left(\frac{CS+cS+cC}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{CS+cS-cC}{2}\right)^{3:2}$$
$$+\tfrac{3}{2}(CS+cS+cC)^{1:2}.(dCS+d.cS+dcC)$$
$$-\tfrac{3}{2}(CS+cS-cC)^{1:2}.(dCS+dcS-dcC)$$

Dantur vero CS, cS, cC in numeris, pariterque & earum differentialia per *dK*, *dk*. Quare hac ratione dabitur aequatio inter *dK*, *dk*.

Aſſumto porro tertio loco cometae, combinando dabuntur inſuper duae aequationes inter *dk*, *d*ꝁ, & *dK*, *d*ꝁ. quibus ergo differentiae hae definientur. Quodſi peracto calculo deprehendantur notabiles, calculus eodem mo-
Fig. 16. do inſtaurabitur, aſſumendo diſtantias AD, TC, BE prima hac operatione correctas.

PROBLEMA XXXIV.

§. 159. *Datis duobus cometae locis geocentricis ſibi admodum vicinis, atque diſtantia cometae geocentrica tempore alterutrius obſeruationis, inuenire ſitum orbitae eiusque magnitudinem.*

SOLVTIO.

Fig. 17. Sit S centrum ſolis, T, t loca telluris, C, c loca cometae, K, k eadem in eccliptica proiecta, erunt TK, tk eius longitudines, CTK, ctk latitudines obſeruatae. Detur iam diſtantia TC, adeoque & TK = TC . coſCTK. E punctis K, T in rectam tk demittantur normales KQ, TR atque ducantur AS, CP ut in problemate praecedente. Porro fiat

$TK = x$	$CTK = \lambda$
$Qk = y$	$ctk = \Lambda$
$tR = \alpha$	$TAt = \omega$
$AT = p$	$CTS = b$
$TS = r$	

Quoniam latitudines geocentricae λ, Λ parum inter ſe differunt, ponatur

$$\tan\Lambda = \tan\lambda + q$$

eruntque y, α, q, ω, quantitates admodum exiguae, ob aſſumtam locorum T, t vel C, c vicinitatem.

Hinc iam erit

$$AK = x+p$$
$$KQ = (x+p)\sin\omega$$
$$Kk^2 = y^2 + (x+p)^2\sin\omega^2$$

Porro habebitur

$$AR = p\cos\omega$$
$$AQ = (x+p)\cos\omega$$
$$Ak = (x+p)\cos\omega + y$$
$$Rk = (x+p)\cos\omega - p\cos\omega + y = x\cos\omega + y$$
$$tk = x\cos\omega + y - \alpha$$

adeoque

$$ck = [x\cos\omega + y - \alpha].(\tan\lambda + q)$$
$$CK = x\tan\lambda$$

Quare

$$cP = x(\cos\omega - 1)\tan\lambda + (y-\alpha).\tan\lambda + x\cos\omega.q + (y-\alpha)q$$

ſiue

$$cP = y(\tan\lambda + q) - \alpha(\tan\lambda + q) - x(1-\cos\omega)\tan\lambda + xq$$

Pro

Pro qua formula ſubſtituemus breuitatis ergo

$$cP = Ay + Bx - C$$

Eſt vero

$$Cc^2 = cP^2 + Kk^2$$

Quare erit

$$\begin{aligned} Cc^2 - y^2 + (x+p)^2 \text{ſin}\,\omega^2 & = Dy^2 + Ey + F \\ + A^2y^2 + 2AByx + C^2 & \\ + 2ACy - 2BCx. & \\ + B^2x^2 & \end{aligned}$$

Porro erit

$$CS^2 = r^2 + x^2 \text{ſec}\,\lambda^2 - 2rx\,\text{ſec}\,\lambda.\text{coſ}\,b$$

At iam per ſolutionem ſecundam Problematis XV. (§. 83.) eſt

$$3\sqrt{2}.mT = \frac{k[a+b+\frac{1}{2}\sqrt{[(a+b)^2 - k^2]}]}{\sqrt{[a+b+\sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]}}$$

ſiue cum chorda k ſit admodum exigua, atque proxime $a = b$, erit absque notabili errore

$$3\sqrt{2}.mT = \frac{3k\sqrt{a}}{2}$$

$$k = \sqrt{8}.mT : \sqrt{a}$$

ſiue

$$cC = \frac{\sqrt{8}.mT}{\sqrt{CS}}$$

adeoque ſubſtitutis valoribus

$$Dy^2 + Ey + F = \frac{8m^2T^2}{\sqrt{(r^2 + x^2\text{ſec}\,\lambda^2 - 2rx\,\text{ſec}\,\lambda.\text{coſ}\,b)}}$$

Qua ergo aequatione, data diſtantia x, dabitur y, adeoque & ſitus chordae proiectae Kk. Hac vero data facile dabitur tota orbita.

SCHO-

SCHOLION.

§. 160. Cum aequatio, ad quam tandem deuenimus, quadratica ſit, dabuntur duo ipſius y valores, adeoque tertia obſeruatio erit adhibenda, quo definiri queat, quali reapſe ſit utenda. Porro aſſumſimus diſtantiam x eſſe datam. Quodſi vero indeterminata ſit, ſucceſſiue alia atque alia aſſumi poterit, usque dum valor ipſius y euadat imaginarius. Dantur ergo limites quos diſtantia x excedere nequit, atque inueniuntur, ſi in ultima aequatione ponatur $y = o$. Quo facto aequatio abit in aliam, in qua diſtantia x ad ſextam dimenſionem aſſurgit.

PROBLEMA XXXV.

§. 161. *Dato ſitu orbitae cometae parabolicae, inuenire ſitum & proprietates in planum eccliptices proiectae.*

SOLVTIO.

Sit F centrum ſolis atque proinde focus orbitae, Nn linea nodorum, NQn orbita ipſa ad planum eccliptices ſub angulo quocunque inclinata, A perihelium, AFB axis. Aſſumto puncto quolibet Q, ducatur QP ad Nn normalis, atque fiat QP ad qP in ratione ſinus totius ad coſinum anguli eleuationis, punctum q erit in orbita proiecta, ipſique punctum Q normaliter imminet. Fig. 18.

Quodſi

Quodſi iam Q ſit culmen orbitae, directio utriusque parabolae in Q, q erit lineae nodorum parallela. Bifariam ſecetur Nn in G, ducantur FQ, Fq, GQ, Gq, erit GQ axi AB, & Gq axi orbitae proiectae aB parallela, atque FQ=QG, Fq=qG, FP=PG.

Porro erit FQ ad Fq ut ſinus totus ad coſinum latitudinis heliocentricae ipſius culminis Q.

Similiter ob NG=Gn, & Gq axi aB parallelam, recta qF tranſit per focum orbitae proiectae f, atque eſt

$$Nn^2 = 16.FQ^2 = 16.Fq.fq$$

unde

$$Fq:FQ = FQ:fq.$$

Cumque utraque parabola in Q & q ſit lineae nodorum Nn parallela, anguli, quos faciunt cum rectis FQ, Fq erunt angulis QGF, qGF aequales, adeoque

$$AF = FQ.\sin QGF^2 = PQ^2:FQ$$

$$af = fq.\sin qGF^2 = fq.Pq^2:Fq^2$$

Dicto angulo inclinationis $= \eta$ erit

$$Pq = PQ.\cos\eta$$

adeoque

$$af = fq.PQ^2.\cos\eta^2:Fq^2$$

unde porro

$$AF:af = Fq^2:FQ.\cos\eta^2.fq$$

Eſt vero

$$fq = FQ^2:Fq$$

Quare

$$AF:af = Fq^3:FQ^3.\cos\eta^2$$

Cum-

Cumque Fq:FQ ſit coſinus latitudinis heliocentricae puncti Q dicta hac latitudine $= \lambda$, erit

$$AF:af = \cos\lambda^3:\cos\eta^2$$

$$\sqrt{af} = \frac{\sqrt{AF}.\cos\eta}{\cos\lambda^{3:2}}$$

Quodſi iam a radio vectore deſcribatur area quaedam, quam dicemus $= A$, atque tempus elapſum ſit $= T$, erit

$$T = \frac{A}{m\sqrt{2AF}}$$

At vero eaedem haec area in orbita proiecta minor eſt in ratione $1:\cos\eta$, quare erit $= A.\cos\eta. = D$. Cumque ſit

$$T = \frac{A}{m\sqrt{2AF}} = \frac{A.\cos\eta}{m\sqrt{(2af)}.\cos\lambda^{3:2}}$$

erit

$$T = \frac{D}{m.\cos\lambda^{3:2}.\sqrt{(2af)}}$$

Ut adeo tempus detur per aream in eccliptícam proiectam D, per ſemilatus rectum orbitae proiectae 2af, & coſinum latitudinis heliocentricae culminis Q.

PROBLEMA XXXVI.

§. 162. *Data orbita proiecta aqn, inuenire orbitam veram NQn, eiuſque inclinationem & lineam nodorum Nn.*

SOLV-

SOLVTIO.

Sit orbita proiecta aNqn, eius axis af, focus f, centrum ſolis F. Quod cum ſit focus orbitae verae, agatur recta fFq per utrumque focum, atque ducta tangente tq, ipſique parallela NFn per centrum ſolis F, haec erit linea nodorum. Porro ad hanc demittatur normalis QqP, fiat que $FQ = \frac{1}{4} Nn$, punctum Q erit culmen orbitae verae, & $qP : QP$ erit coſinus inclinationis. Denique fiat $QG = QF$, vel $NG = Gn$, ducatur QG ipſique parallela AF, haec erit axis orbitae verae. Cumque ſit $AF = PQ^2 : FQ$ (§. 161.) hinc dabitur diſtantia verticis vel perihelii A a centro ſolis F.

THEOREMA XI.

§. 163. *Orbita proiecta datur per meras longitudines geocentricas cometae, at quinque obſeruationes ad eam definiendam requiruntur.*

DEMONSTRATIO.

Determinatur orbita proiecta, ſi detur vertex a, & focus f, ſiue ſitus utriusque huius puncti ratione rectae e dato loco telluris in centrum ſolis ductae. Pendet itaque iſte ſitus a quatuor incognitis hunc in finem aſſumendis. His vero aſſumtis dabitur (§. 162.) linea nodorum nN, diſtantia af, & utraque recta FQ, Fq, atque proinde $Fq : FQ = \cos\lambda$ (§. 161.) Quoniam itaque quatuor iſtae incognitae aſſumtae determinandae ſunt per longitudines cometae geocentricas & ſpatia in orbita proiecta percurſa,

curſa, dabuntur haec ſpatia, quae cum temporibus elapſis comparari poterunt (§. 161.) & quoduis ſpatium ad aequationem deducit. Quoniam vero opus eſt quatuor aequationibus, opus quoque erit quatuor ſpatiis proiectis, adeoque quinque longitudinibus geocentricis obſeruatis.

THEOREMA XII.

§. 164. *Si cometa tempore cuiusdam obſeruationis verſetur in polo eclipticꝫ, additis inſuper tribus longitudinibus geocentricis, orbita proiecta determinabitur.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi locus cometae in polo eclipticꝫ in eam proiiciatur, cadet in locum, in quo eodem tempore verſatur tellus. Qualiscunque ergo ſit orbitae proiectae ſitus & magnitudo, oportet per hunc telluris locum tranſeat; adeoque datur definitum quoddam iſtius orbitae punctum. Hoc vero fit, ut ex quatuor incognitis aſſumendis altera euadat ſuperflua, quo ipſo minuetur numerus ſpatiorum, adeoque & longitudinum obſeruatarum.

SCHOLION I.

§. 165. Per ſe patet, ſi cometa in polo eclipticꝫ fuerit ſtationarius, orbitam proiectam definitum iri, duabus his obſeruationibus tertiam adiiciendo. Ceterum calculus, quo definienda eſt orbita, mirum in modum eſt com-

plexu:, ut adeo utique praestet latitudines geocentricas una cum longitudinibus ad definiendam orbitam veram adhibere.

SCHOLION II.

§. 166. Quae hactenus de orbita cometae in planum eccliptices proiecta diximus, uniuersaliora sunt, quippe proiectio in planum eccliptícae mere est arbitraria, atque eligi potest planum quodlibet, cuius situs ratione ecclipticae sit datus. Eiusmodi vero planum eccliptices vicem sustinet, atque in istud simul proiicienda sunt loca telluris, & rectae ex his in loca cometae ductae, uti iam exemplo rem illustratam dedimus in Problemate XXXI. (§. 155.) Plura dantur huiuscemodi plana, quae ad compendium calculi quicquam facere possunt. Sic v. gr. planum quod transit per centra solis telluris & cometae idem nobis sistit compendium, quod sisteret ecclíptica, si cometae versaretur in alterutro nodorum. Similiter planum, quod ad rectam e centro telluris in centrum cometae ductam normale est, casum nobis suppeditat casui Theorematis XII. (§. 164.) analogum.

THEOREMA XIII.

§. 167. *Si cometa ita sit stationarius, ut quater in eodem caeli puncto haerere videatur, ipsius orbita absque ullo computo construetur.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Cum enim sit stationarius, rectae e locis telluris in loca cometae ductae erunt parallelae. Concipiatur itaque planum per centrum solis transiens atque ad rectas istas normale, in hoc plano dabuntur quatuor puncta orbitae in istud proiiciendae. Haec vero cum sit parabolica, patet eam construi posse. Unde per Problema XXXVI. (§. 162.) dabitur situs orbitae verae.

SCHOLION.

§. 168. Vix equidem unquam cometa quater in eodem caeli puncto haerere obseruabitur, si temporum interualla fuerint notabiliora. At si breuiora fuerint, exactissimis obseruationibus opus erit, siquidem hac ratione orbitam veram eruere volueris. Dari tamen poterit, quae a vera parum aberrat, si motus cometae adparens fuerit lentissimus.

THEOREMA XIV.

§. 169. *Si cometa bis obseruetur in eodem caeli puncto, rectae, quae aguntur per utrunque locum telluris, & per utrumque locum cometae in linea nodorum coincidunt.*

DEMONSTRATIO.

Sint loca telluris T, t, cometae C, c. Ex his Fig. 10.
in planum demittantur normales CK, ck, & CN, cn normales ad lineam nodorum Nn. Porro agantur rectae NK, nk, TK, tk, CcM,

 TtM.

TtM. Quoniam cometa eſt ſtationarius, rectae TC, tc itemque rectae TK, tk ſunt parallelae, & inſuper anguli latitudinum CTK, ctk aequales. Unde erit

CK : ck = CT : ct = KT : kt = CM : cM = TM : tM = KM : kM

Quare rectae Tt, Cc, Kk in M coincidunt. Porro eſt

CK : ck = CN : cn = KN : kn = CM : cM = KM : kM = NM : nM

quare recta Nn in idem punctum M incidit, in quod incidunt rectae Cc, Kk, Tt. Eſt vero Nn linea nodorum, unde conſtat propoſitum.

THEOREMA XV.

§. 170. *Si cometa incedat in plano eccliptices, eiuſque orbita ſit parabolica, tres obſeruationes ſiue longitudines geocentricae ſufficiunt ad eam determinandam; contra ea quarta inſuper opus eſt, ſi incedat in ellipſi niſi detur huius axis maior.*

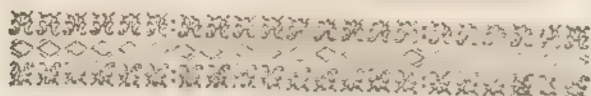
DEMONSTRATIO.

Tres longitudines determinandae orbitae parabolicae ſufficere, patet ex problemate XXXI. (§. 158.) ipſaque orbitae conſtructio longe eſt facilior. Contra ea cum tres iſtae longitudines pro determinanda parabola neceſſario requirantur, in ellipſi vero accedat ratio inter diſtantiam periheliam & ſemilatus rectum, haec indeterminata maneret, niſi vel accederet obſeruatio quarta, vel data eſſet longitudo axeos maioris, ſiue quod idem eſt, tempus periodicum.

SCHOLION.

§. 171. Eadem ratione ſi orbita fuerit ad eccliptícam inclinata ſed parabolica, tres equidem obſeruationes requiruntur, at non complete. Carere enim poſſumus vel tempore quo fit altera obſeruatio, vel longitudine vel latitudine geocentrica. At ſi nilominus ſingulae tres obſeruationes complete adhibeantur, plura data adſunt quam opus eſt, unde ad compendium calculi adhiberi poterunt ſuperfluae, ſaltem ad eius correctionem.





PROPRIETATES INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM.

SECTIO IV.

Demonſtrantur proprietates concinniores orbitae Cometarum, ſimulque & Planetarum ellipticae.

LEMMA XXIII. THEOREMA.

Fig. 20. §. 172. *Si in ellipſi ſumantur tres ordinatae aequidiſtantes PN, QL, RM, atque e foco F ducantur radii vectores FN, FL, FM, erit 2FL = FN + FM.*

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam ellipſeos eſt

$$FN = AF + \left(\frac{AB - 2AF}{AB}\right) . AP$$

$$FM = AF + \left(\frac{AB - 2AF}{AB}\right) . AR$$

adeoque

$$FN + FM = 2AF + \left(\frac{AB - 2AF}{AB}\right) . (AP + AR)$$

Eſt

Eſt vero per hypotheſin

$$(AP + AR) = 2AQ$$

adeoque

$$FN + FM = 2\left[AF + \left(\frac{AB - 2AF}{AB}\right) . AQ\right] = 2FL.$$

LEMMA XXIV. THEOREMA.

§. 173. *Si in ellipſi AQBD ſumatur punctum quoduis Q, atque ducatur diameter QCD, tangens QT, ipſique parallela quaelibet NGM, nectantur focus F & punctum aſſumtum Q recta QFb, atque ordinata NM orthogonaliter transferatur in nEm, ut ſit nE = mE, puncta n, m itidem erunt in ellipſi Qnbm, cuius focus pariter eſt F, & axis maior Qb, axi maiori AB ellipſeos prioris aequalis.* Fig. 21.

DEMONSTRATIO.

Cum QCD ſit diameter ellipſeos, atque ordinata NM tangenti QT parallela, per notiſſimam ſectionum conicarum proprietatem, aequatio inter abſciſſam QG & ordinatam NM prorſus analoga eſt illi, quae exprimit relationem inter abſciſſas in axe maiore ſumtas & adplicatas ad axin normales. Quoniam porro per conſtructionem eſt NM = nm, & QG ∽ QE, atque NM ad FQ normalis, aequatio inter QE & nm itidem erit ad ellipſin, cuius axis maior eſt Qb. Ducta porro Cc ipſi QT parallela, atque erecta cγ ad axin Qb normali = cC, erit cγ ſemiaxis minor. Dicatur iam

$$AB = \alpha$$
$$AF = f$$
$$FQ = z$$

Ducta

Ducta recta Qf in alterum focum f, angulus TQF per naturam ellipſium erit $= 90^\circ - \frac{1}{2}FQf$, eritque

$$FQ + Qf = a$$
$$Qf = a - z$$
$$Ff = a - 2f$$

hinc per formulas trigonometricas

$$\text{coſin}\,\tfrac{1}{2}FQf = \text{ſin}\,TQF = \text{ſin}\,QcC = \frac{\sqrt{(af-ff)}}{\sqrt{(az-zz)}}$$

$$\text{coſ}\,TQF = \text{coſ}\,QcC = \frac{\sqrt{[az-zz-(af-ff)]}}{\sqrt{(az-zz)}}$$

$$\text{coſ}\,QFC = \frac{az-(2af-ff)}{z(a-2f)}$$

$$\text{ſin}\,QFC = \frac{2\sqrt{(af-ff)}}{z(a-2f)} \cdot \sqrt{[az-zz-(af-ff)]}$$

Unde ob $QTC = QFC - TQF = FCc$, erit

$$\text{ſin}\,FCc = \frac{(a-2z)\sqrt{(af-ff)}}{(a-2f)\sqrt{(az-zz)}}$$

Eſt vero

$$Fc : \text{ſin}\,FCc = FC : \text{ſin}\,QcC$$

adeoque ſubſtitutis valoribus repertis debitaque reductione facta

$$FC = \tfrac{1}{2}a - z$$
$$Fc + z = Qc = \tfrac{1}{2}a$$
$$Qb = a = AB.$$

Eſt porro ſemidiater coniugata $Cc = c\gamma = \sqrt{(az-zz)}$, adeoque cum ſit

$$F\gamma^2 = Fc^2 + c\gamma^2$$

erit

$$F\gamma^2 = (\tfrac{1}{2}a - z)^2 + (az - zz) = \tfrac{1}{4}a^2$$
$$F\gamma = \tfrac{1}{2}a = Qc$$

Unde patet F eſſe focum utriuſque ellipſeos.

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 174. Similiter erit ſemidiameter

$$QC = \sqrt{[\tfrac{1}{4}(a-2z)^2 + af - ff]} = \sqrt{(Fc^2 + CH^2)}$$

Hinc porro

$$\text{ſin}\,QCc = \frac{a\sqrt{(af-ff)}}{\sqrt{(az-zz)} \cdot \sqrt{[\tfrac{1}{4}(a-z)^2 + af - ff]}}$$

COROLLARIVM II.

§. 175. Cum ſit per naturam ellipſeos

$$GM^2 = \frac{QG.GD.Cc^2}{QC^2}$$

atque

$$\frac{QG.GD}{QC^2} = \frac{QE.Eb}{Qc^2}$$

erit

$$GM^2 = Em^2 = \frac{QE.Eb.Cc^2}{Qc^2}$$

COROLLARIVM III.

§. 176. Dicta itaque $FE = \xi$, erit

$$Em^2 = \frac{(az - a\xi - (z-\xi)^2).(az-zz)}{\tfrac{1}{4}a^2}$$

$$Fm = \frac{2(az-zz)}{a} - \frac{(a-2z)\xi}{a}$$

LEMMA XXV. THEOREMA.

§. 177. *Sint omnia ut in lemmate praecedente, ductis radiis vectoribus Fn, Fm, FN, FM, ſumma priorum Fn + Fm erit aequalis ſummae poſteriorum.*

G 5 DEMON-

DEMONSTRATIO.

Per punctum G ducatur adplicata PGK, atque e foco F recta FK. Quoniam $NG = GM$, erit per Lem̃a XXIII. (§. 172.) $2FK = FN + FM$. Cumque ſit $Fn = Fm$, demonſtrandum eſt, eſſe $Fn = FK$.

Quoniam TQ, EG, cC ſunt parallelae, erit

$$cQ : QC = cE : GC$$

$$CG = \frac{QC \cdot cE}{cQ}$$

ſiue ſubſtitutis valoribus

$$CG = \frac{(\xi + \frac{1}{2}a - z)\sqrt{[\frac{1}{4}(a-2z)^2 + af - ff]}}{\frac{1}{2}a}$$

Porro per trigonometriam eſt

$$\cos QCF = \frac{QC^2 + CF^2 - QF^2}{2QC \cdot CF}$$

$$CP = CG \cdot \cos QCF$$

unde valoribus ſubſtitutis, erit

$$\cos QCF = \frac{\frac{1}{2}a(a-2z)}{(a-2f)\sqrt{[\frac{1}{4}(a-2z)^2 + af - ff]}}$$

$$CP = \frac{(a-2z) \cdot (2\xi + a - 2z)}{2(a-2f)}$$

Hinc

$$PF = FC - CP = \frac{(a-2f)^2 - (a-2z)^2 - 2(a-2z)\xi}{2(a-2f)}$$

Eſt vero per naturam ellipſeos

$$FK = \frac{2(af-ff)}{a} + \frac{a-2f}{a} \cdot FP$$

adeo-

adeoque ſubſtitutione debitaque reductione facta

$$FK = \frac{2(az-zz)}{a} - \frac{(a-2z)\xi}{a}.$$

Eundem vero valorem habuimus pro radio Fm (§. 176.) erit itaque

$$FK = Fm$$

$$2FK = 2Fm = Fn + Fm = FN + FM.$$

LEMMA XXVI. THEOREMA.

§. 178. *Sint omnia ut in utroque Lemmate praecedente, areae ſectorum NQMF, nQmF erunt in ratione ſubduplicata ſemilaterum rectorum ellipſium AB, Qb.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi ordinatae NM ad diametrum QD eſſent normales, area ſegmenti NMQ maior foret in ratione reciproca ſinus inclinationis QGN. Unde cum in nm translatae ad axin Qb ſint normales, ſegmentum nQm utique in hac ratione maius eſſe debet. At vero cum abſciſſae QE maiores ſint abſciſſis QG, ſegmentum nmQ in hac quoque ratione maius eſt; Ut adeo ſit

$$nmQ = \frac{NMQ \cdot QE}{\sin QEG \cdot QG}$$

Eſt vero per trigonometriam

$$\frac{QE}{QG \cdot \sin QEG} = \frac{1}{\sin QEG} = \frac{1}{\sin TQF}$$

adeo-

adeoque ſegmentum

$$nmQ = \frac{NMQ}{\sin TQF}$$

Eſt vero (§. 173.)

$$\sin TQF = \frac{\sqrt{(af-ff)}}{\sqrt{(az-zz)}}$$

Quare

$$nmQ = \frac{NMQ \cdot \sqrt{(az-zz)}}{\sqrt{(af-ff)}}$$

$$nmQ : NMQ = \sqrt{(az-zz)} : \sqrt{(af-ff)}$$

Porro cum triangula nFm, NFM habeant baſes nm, NM aequales, eorum areae erunt ut perpendicula e foco ſiue vertice communi F in eas demiſſa adeoque ut ſinus totus ad ſinum anguli NEF = TQF. Unde ſimiliter erit

$$nFm : NFM = \sqrt{(az-zz)} : \sqrt{(af-ff)}$$

Quare & toti ſectores

$$nQmF : NQMF = \sqrt{(az-zz)} : \sqrt{(af-ff)}$$

Sunt vero ſemilatera recta ellipſium

$$AHB = \frac{2(af-ff)}{a} = s$$

$$Q\gamma b = \frac{2(az-zz)}{a} = S$$

adeoque ſectores

$$nQmF : NQMF = \sqrt{\frac{aS}{2}} : \sqrt{\frac{as}{2}} = \sqrt{S} : \sqrt{s}$$

Conſtat ergo propoſitum.

COROL-

COROLLARIVM.

§. 179. Erit itaque

$$\frac{nQmF}{\sqrt{S}} = \frac{NQMF}{\sqrt{s}}$$

LEMMA XXVII. THEOREMA.

§. 180. *Axi maiori ellipſeos AB inſiſtat ſemicirculus AnmB, ſumta chorda quacunque NM eaque in G biſecta, e centro C agatur recta CGQ, e puncto Q recta Qc per focum F, denique recta Cc chordae NM vel tangenti TQ parallela. Porro per puncta N, Q, M ducantur nN, qQ, mM ad axin AB normales, nectantur n, m, q, C rectis nm, qC, dico, arcum nm eſſe in q biſectum, atque ſagittam qg = QE.* Fig. 22.

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam ellipſeos ordinatae Pm, PM ſunt in ratione axeos maioris ad minorem, quare chordae mn, MN productae in R cum axe maiori coincident, unde porro erit ng = gm, cum ſit NG = GM. Hinc porro

$$CQ : QG = Cq : qg$$

Sed ob parallelas NM, cC erit

$$CQ : QG = Qc : QE$$

adeoque

$$Cq : qg = Qc : QE$$

Eſt vero (§. 173.)

$$cq = AC = Qc$$

Quare &

$$qg = QE$$

COROL-

COROLLARIVM.

§. 181. Cum Qc sit semiaxis maior alterius ellipseos Qb (Fig. 21.) atque semiaxi maiori AC aequalis, patet (Fig. 22.) sagittam QE similiter esse sinum versum arcus circularis arcui nq aequalis. Unde non modo chordae ellipticae nm, NM (Fig. 21.) verum & chordae arcuum circularium, ad quos referuntur aequales sunt.

SCHOLION.

Fig. 22. §. 182. Quod ut clarius explicetur, ponamus ellipsin ANMB esse proiectionem orthographicam circuli AnmB, obliquius ad eam inclinati, ita ut axis AB sit linea interfectionis siue linea nodorum, & PM : Pm cosinus inclinationis. Quo posito chorda NM erit proiectio chordae circularis nm, similiterque (Fig. 21.) chorda elliptica nEm erit proiectio chordae circuli, cuius diameter & linea interfectionis est axis maior Qb, & cosinus inclinationis = cγ : Qc. At per Corollarium praecedentis Lemmatis non modo chordae circulares aequales sunt, verum & ellipticae, quae sunt illarum proiectio.

THEOREMA XV.

Fig. 21. §. 183. *Sint omnia ut in Lemmate vigesimo quarto (§. 173.) utraque ellipsis Qmb, AQB poterit esse orbita cometae, atque utraque eodem tempore percurritur.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Etenim F est focus utrique communis, unde per legem tertiam (§. 68.) erit centrum solis, quod necessario focus esse debet sectionis conicae, quam cometa percurrit. Quoniam porro vi Lemmatis citati uterque axis maior AB, Qb est aequalis, tempus periodicum quoque idem sit oportet (§. 71.)

THEOREMA XVI.

§. 184. *Iisdem positis, arcus nQm, NQM eodem tempore percurruntur.*

DEMONSTRATIO.

Per legem quartam (§. 69.) tempora sunt ut areae, quas verrit radius vector per radicem quadratam semilaterum rectorum diuisae, adeoque (§. 178.) tempus quo percurritur arcus NM erit ad tempus, quo percurritur nQm, ut (NQMF : $\sqrt{s}$) ad (nQmF : $\sqrt{S}$) Sed est (§. 179.)

$$\frac{NQMF}{\sqrt{s}} = \frac{nQmF}{\sqrt{S}}$$

adeoque & tempora aequalia sint necesse est.

PROBLEMA XXXVII.

§. 185. *Si cometa in orbita elliptica percurrat arcum quemlibet NQM, inuenire infinitas alias ellipses, in quibus eodem tempore percurrisset arcus, quos subtendant chordae ipsi NM aequales, & summa radiorum vectorum extremorum summae extremorum FN + FM aequalis fuisset.*

SOLV-

SOLVTIO.

Bisecta chorda NM in G, e centro C agatur recta CQG. atque quaelibet ellipsis datae ANMB isochrona siue aeque periodica voto satisfaciet, si ita ponatur, ut transeat per punctum Q, & focus cum foco F ellipseos datae coincidat.

Aliter.

Fig. 22. Spectetur ellipsis AQB ut proiectio orthographica circuli AqB, atque chorda NM erit proiectio chordae nm. Arcus nm in circulo AqB transferatur ad lubitum, atque mutata inclinatione quaeratur chorda proiecta datae NM aequalis. Quo facto dabuntur duo puncta ellipseos construendae, atque insuper uterque vertex A, B. Ea itaque constructa, ita erit ponenda ut focus cum foco F coincidat.

SCHOLION.

§. 186. Ponamus breuitatis ergo nm esse ipsam chordam translatam, demittantur nN, mP ad axin normales, & chorda mn producatur in R, ubi axin decussat. Fiat ut chorda mn ad mR, ita chorda ellipseos datae ad quartam proportionalem. Haec ponatur ex R in M, eruntque N, M duo illa puncta quaesita ellipseos ANMB, & arcus NM voto satisfaciet.

DEFINITIO IV.

§. 187. *Lapsus ellipticus cometae in solem est eiusdem in ellipsi incessus, cuius axis minor vel semilatus rectum* $=0$, *siue cuius vertex cum foco in centro solis coincidit.*

COROLLARIVM I.

§. 188. Quoniam axis maior ellipseos est finitus, lapsus elliptici datur initium, atque cometa hac ratione in solem delabens, a quiete inchoat, totumque axin maiorem emetitur.

COROLLARIVM II.

§. 189. Quoniam porro tempus periodicum cometae in ellipsi incedentis unice pendet a longitudine axeos maioris (§. 71.) patet, hoc dato, una dari tempus, quo cometa a quiete inchoans in solem delabitur.

PROBLEMA XXXVIII.

§. 190. *Data distantia cometae vel corporis quiescentis a sole inuenire tempus, quo in solem delabitur.*

SOLVTIO.

Sit distantia ista $=D$, erit haec longitudo axeos maioris ellipseos, cuius tempus periodicum duplo maius est tempore quaesito. Unde cum tempus periodicum sit (§. 71.)

$$=\frac{\pi}{m}\cdot\left(\tfrac{1}{2}D\right)^{3:2}$$

erit tempus lapsus elliptici in solem

$$t=\frac{\pi}{[illegible]}\cdot D^{3:2}:4\sqrt{2}$$

COROL-

COROLLARIVM.

§. 191. Quoniam tempus lapſus parabolici eſt (§. 103.)

$$=D^{3:2}:3m\sqrt{2}$$

erit tempus parabolicum ad ellipticum ut 4 ad 3π ſiue proxime $=14:33=73:172$.

SCHOLION.

§. 192. Si pro *D* ſucceſſiue ſubſtituantur diſtantiae planetarum mediae, erit tempus lapſus elliptici in ſolem

♄	dierum	1902,60.
♃	- -	764,38.
♂	- - -	121,42.
♁	- - -	64,57.
♀	- - -	39,70.
☿	- - -	15,55.

PROBLEMA XXXIX.

§. 193. *Inuenire celeritatem cometae in ellipſi incedentis.*

SOLVTIO.

Fig. 12. Sit AM arcus ellipticus, A vertex, AF eius diſtantia a foco vel centro ſolis $=f$, axis maior ſit a, diſtantia FM$=z$, arcus MN infinite paruus, MP arcus circularis ſoli concentricus. Tempus quo percurritur MN ſit $=T$, quo vero percurritur MP$=t$, erit ſemilatus rectum ellipſeos $=2(af-ff):a$, adeoque vi legis quartae (§. 69.)

$$T=\frac{MFN.\sqrt{a}}{m\sqrt{(2af-2ff)}}$$

$$t=\frac{MFP}{m\sqrt{z}}$$

Dicantur celeritates per MN$=C$, per MP$=c$, erit

$$C=MN:T$$
$$c=MP:t$$

adeoque

$$C:c=\frac{m.MN.\sqrt{2}(af-ff)}{MFN\sqrt{a}}:\frac{MP.m\sqrt{z}}{MFP}$$

ſiue

$$C:c=MN\sqrt{2}(af-ff):(MP.\sqrt{za})$$

Eſt vero

$$\frac{MP}{MN}=\text{ſin}\,MNP=\frac{\sqrt{(af-ff)}}{\sqrt{(az-zz)}}\ (\text{§. }173.)$$

Quare ſubſtitutione facta

$$C:c=\sqrt{2}(az-zz):\sqrt{za}$$

Eſt vero (§. 75.) celeritas circularis

$$c=2m:\sqrt{z}$$

adeoque

$$C=\frac{2m\sqrt{2}(az-zz)}{z\sqrt{a}}$$

Quod eſt ſpatium iuxta directionem tangentialem uno die naturali percurrendum.

COROLLARIVM.

§. 194. Cum formulam erutam nonniſi axis maior & diſtantia FM ingrediatur, patet celeri-

leritatem a ſitu foci in axe eſſe independentem.

THEOREMA XVI.

§. 195. *Si tempora periodica duorum pluriumue cometarum in ellipſibus incidentium ſint aequalia, celeritas ſingulorum ad eandem a ſole diſtantiam eſt eadem.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi tempora periodica ſint aequalia, axes maiores quoque ſunt aequales (§. 71.) Unde cum in genere celeritas elliptica ſit

$$C = \frac{2\sqrt{2}.m.\sqrt{(az-zz)}}{z\sqrt{a}}$$

erit axis maior *a* pro ſingulis idem. Cumque ex hypotheſi & diſtantia *z* ponatur eadem, patet celeritatem quoque eandem eſſe.

THEOREMA XVII.

Fig. 28. §. 196. *Si cometa in ellipſi incedens percurrat arcum quemlibet NM, ducta chorda NM eaque biſecta in G, e centro C agatur ſemidiameter CGQ, atque e foco F recta FB axi maiori AB aequalis. Facta porro $Fg = \frac{1}{2}(FN+FM)$ & $Gn = gm = GN$, dico, ſi cometa e puncto b a quiete incboans labatur in ſolem, tempus quo emetitur partem abſciſſam mn eſſe aequale tempori, quo percurritur arcus NM.*

DEMONSTRATIO.

Recta Fb ſpectari poterit ceu ellipſis, cuius focus cum vertice in F coincidit, atque ob Fb

Fb = AB tempus quo percurritur idem eſt ac tempus periodicum ellipſeos AQB (§. 71.). Erit porro Fn + Fm ſumma radiorum vectorum = FN+FM, & nm chorda percurſa = NM, quare vi Problematis XXXVII. (§. 185.) utraque chorda eodem tempore percurritur.

COROLLARIVM.

§. 157. Tempus itaque, quo percurritur arcus ellipticus quicunque per lapſum cometae ellipticum in ſolem definiri poterit.

DEFINITIO V.

§. 198. *Scala celeritatum ellipticarum eſt recta ita diuiſa, ut ad datam quamuis a ſole diſtantiam celeritatem cometae in ellipſi incedentis exhibeat.*

COROLLARIVM.

§. 199. Cum celeritas elliptica pendeat ab axe maiori (§. 194.) conſequens eſt, ſcalam hanc eandem manere, quoties axis maior retineatur idem, hoc vero mutato ſcalam quoque mutatum iri.

THEOREMA XVIII.

§. 200. *Si F denotet centrum ſolis, in quod cometa a quiete incboans ex A delabatur, atque dato cuiuis puncto M adſcribatur tempus, quo vel ex A peruenit in M, vel etiam ex M in F, recta AF hac ratione diuiſa erit ſcala celeritatum pro ellipſibus, quarum axis maior eſt = AF.* Fig. 13.

 DEMON-

DEMONSTRATIO.

Datur enim tempufculum, quo percurritur fpatiolum quodlibet Mm. Hoc vero per illud diuifum celeritatem in M exhibet. Cum vero quilibet axis maior aliam requirat celeritatum fcalam (§. 199.) atque recta AF referat ellipfin cuius vertex & focus eft F, axis maior $=$ AF (§. 197.) confequens eft fcalam his tantum ellipfibus inferuire, quarum axis maior eft $=$ AF.

THEOREMA XIX.

§. 201. *Sit A centrum folis, cometa a quiete incboans ex B labatur in A, diametro AB defcribatur femicirculus, affumta abfciffa qualibet AP, normaliter ducatur ordinata PM, atque porro AM, dico, tempus lapfus integri per BA effe ad tempus lapfus per BP, ut area femicirculi AMB ad aream fegmenti AMB.*

DEMONSTRATIO.

Etenim recta AB refert ellipfin omni latitudine carentem, unde fpatia, quae verrit radius vector, quibusque tempora funt aequalia per notiffimum Aftronomiae theorema commodius & vel neceffario per fpatia femicirculi axi maiori AB infiftentis exhibentur. Eft vero focus in A, unde recta AM radii vectoris vicem fuftinet, & tempora erunt ut areae, quas verrit. Quare tempus lapfus integri erit ad tempus lapfus per BP, ut area femicirculi ad aream fectoris MAB.

Ali-

Aliter.

Sit AB $=a$, AP $=z$, Pp $=-dz$, tempufculum, quo labendo percurritur Pp fit $=d\tau$, erit celeritas in P $-dz:d\tau$. Vidimus vero, hanc effe (§. 193.)

$$=\frac{2\sqrt{2}.m.\sqrt{(az-zz)}}{z\sqrt{a}}$$

Quare erit

$$-\frac{dz}{d\tau}=\frac{2\sqrt{2}.m.\sqrt{(az-zz)}}{z\sqrt{a}}$$

unde

$$-\frac{2\sqrt{2}.md\tau}{\sqrt{a}}=\frac{zdz}{\sqrt{(az-zz)}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}.m}{\sqrt{a}}.\tau=\int\frac{zdz}{\sqrt{(az-zz)}}$$

Eft vero $\frac{1}{4}azdz:\sqrt{(az-zz)}=$ fpatiolo mAM, unde erit $\frac{1}{2}\tau.m.\sqrt{2a}=$ MAB

$$\tau=\frac{2MAB}{m\sqrt{(2a)}}=\frac{2n.MAB}{\sqrt{2a}}$$

SCHOLION I.

§. 202. Haec formula exhibet tempus in diebus naturalibus, atque eatenus pendet a definita longitudine axeos maioris AB. Quodfi vero in genere tempus peridiocum ellipfeos diuidatur in 100 partes aequales, atque axis maior AB in partes 10000, computabitur tabella lapfuum ellipticorum, qualis eft ea, quam ad calcem huius opufculi adiecimus, ipfius ufus erit uniuerfalior. Eadem quoque vi theo-

 rema-

rematis XVIII. (§. 200.) usui erit in construendis *scalis celeritatum ellipticarum*, qualem sistit
Fig. 25. Fig. 25. Numeri adscripti sunt tempora, quibus cometa lapsu elliptico a dato quouis loco in solem A defertur, si lapsus in B initium sumat, totumque tempus in 50 partes aequales diuidatur.

SCHOLION II.

Fig. 23. §. 203. Quodsi recta FB = AB (§. 196.) hac ratione diuidatur, differentia temporum punctis n, m adscriptorum erit tempus, quo percurritur pars nm adeoque & arcus NM. Usus enim scalae ellipticae idem est ac parabolicae, quem in superioribus fusius explicauimus. Simulac enim datus sit axis maior, dabitur scala celeritatum, & chorda arcus cuiuscunque percursi una cum summa radiorum extremorum FN + FM determinando tempori sufficiunt.

LEMMA XXV. PROBLEMA XL.

Fig. 21. §. 204. *Data longitudine axis maioris & situ foci F nec non situ punctorum N, M, construere ellipsin.*

SOLVTIO.

Uterque radius vector FM, FN ab axe maiori subtrahatur, atque differentiae vel residua per naturam ellipseos erunt distantiae foci alterius f ab utroque puncto M, N. Cum vero haec puncta sint positione data, situs foci f absque difficultate determinabitur. Quo facto recta Ff in C bifariam secetur, atque semilongitudo axis maioris ponetur ex C in A & B, eritque AB situs & longitudo axeos maioris. Hoc vero dato constructio ellipseos facillime absoluetur.

SCHOLION.

§. 205. Vel me tacente patet, situm foci alterius f duplicem esse, quare aliunde constare debet, quinam sit eligendus.

THEOREMA XX.

§. 206. *Si cometa, cuius tempus periodicum notum sit, e tellure obseruetur in utroque nodo, dabitur situs & longitudo lineae nodorum, & situs axeos maioris, totaque orbita, sed indefinita remanet huius inclinatio.*

DEMONSTRATIO.

Sit NAn pars ellipseos, F focus vel centrum solis, eE orbita telluris simulque eius loca tempore utriusque obseruationis. Rectae en, EN sint longitudines cometae geocentricae obseruatae, adeoque positione datae, erit NFn linea nodorum. Quoniam datur tempus periodicum datur quoque longitudo axeos maioris, unde construetur scala celeritatum. In hac a centro solis numeretur tempus a prima obseruatione ad alteram praeterlapsum, atque capiatur distantia, haec erit longitudo lineae nodorum Nn, quae cum necessario transeat per F, atque cadat intra rectas NE, ne positionedatas, hac ratione duci poterit. Datur ergo situs utriusque puncti N, n & foci F,

quare constructio orbitae absoluetur per Lemma praecedens (§. 204.) Cum vero puncta n, N sint in plano eccliptices, orbitae inclinato his solis datis definiri nequit.

SCHOLION.

§. 207. Probe vero notandum, octuplicem esse huius casus solutionem. Primo enim recta Nn quadruplici modo intra rectas NE, ne cadere potest, ita ut per F transeat. Porro quilibet rectae Nn situs duplicem iterum admittit situm orbitae. (§. 205.) unde prodit solutio octuplex. At vero haud difficulter ad duplicem reuocatur. Etenim recta Nn etsi quadruplici modo construi possit, attamen duobus tantum casibus ipsa transit per F, quod esse debet, quia centrum solis necessario est intra utrumque nodum N, n. Ceteris vero duobus casibus F cadit extra nodos N, n, unde vel necessario excluduntur. Porro duplex orbitae situs (§. 205.) hic nullam facessit difficultatem, quippe, tertia obseruatione in subsidium vocata, una cum angulo inclinationis verus orbitae situs determinatur.

THEOREMA XXI.

§. 208. *Si notum sit tempus periodicum cometae in ellipsi incedentis, atque insuper dentur tria ipsius loca geocentrica una cum interuallo temporis, quo factae sunt obseruationes, tota orbita eiusque situs defi-* [redacted]

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Etenim dato tempore periodico datur axis maior adeoque & scala celeritatum (§. 71. 200. seqq.) Huius vero usus cum plane idem sit ac scalae celeritatum parabolicarum, constructio orbitae eodem modo absoluetur, quo in solutione secunda Problematis XXXI. (§. 155.) orbitam parabolicam construendam esse docuimus. Definietur nempe situs verus duorum locorum cometae, unde tertia obseruatione adhibita, tota orbita construetur per Lemma XXV. (§. 204.)

SCHOLION.

§. 209. Tempus periodicum cometae, quod in hoc theoremate ceu datum assumitur, utique abesse posse non me fugit, quippe tria loca cometae geocentrica sufficiunt. Ne itaque absque ulla ratione vel necessitate datorum vel requisitorum numerum auxisse videar, haec notare conueniet. Primo constat eam esse orbitarum cometarum indolem eumque situm, ut arcus ille, quem tempore visibilitatis percurrunt totius ellipseos pars sit admodum exigua. Unde ex sex illis capitibus, quae simul sumta sunt orbitae veluti notae characteristicae (§. 141. 142.) longitudo axeos maioris ex obseruationibus sibi tantopere vicinis tuto colligi nequit, cum vel minimus error in obseruationibus vix euitandus differentiam notabilem pariat. Huc quoque referas *aberrationem luminis*, quae obseruationes plus minusue incertas reddere valet, cuiusque effectus, nisi

iam

iam proxime nota ſit cometae orbita, definiri nequit. Quodſi vero orbita iam proxime ſit definita, accidet quandoque, ut ex ceteris notis characteriſticis cometa cognoſcatur eſſe idem, qui iam olim obſeruatus eſt, unde tempus periodicum colligi poterit, praeſertim ſi iam pluries fuerit obſeruatus. Dato vero tempore periodico, determinatio orbitae utique maxime facilitatur, quippe datur ſcala celeritum, vel ſi calculo rem curatius abſoluere conducat, computari poterit tabella lapſus elliptici. Denique dato tempore periodico, eadem hic notanda veniunt, quae circa parabolam notauimus (§. 170. 171.)

PROBLEMA XLI.

Fig. 23. §. 210. *Data longitudine axis maioris AB, ſumma radiorum vectorum FN + FM & chorda NM, inuenire tempus, quo percurritur arcus NQM.*

SOLVTIO.

Sint omnia ut in theoremate XVII. (§. 196.) cometa ex b in F decidens eodem tempore percurrit partem abſciſſam mn, quo percurritur arcus NQM, atque eſt

$$Fm = \frac{FN + FM + NM}{2}$$

$$Fn = \frac{FN + FM - NM}{2}$$

Pona-

Ponatur

$$Fb = AB = a$$
$$Fm = z$$
$$Fn = \zeta$$

tempora, quibus percurruntur Fm, Fn ſint t, τ, differentia t − τ = T ſit tempus quaeſitum, erit (§. 201.)

$$\frac{2\sqrt{2}.m.t}{\sqrt{a}} = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{(az - zz)}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}.m.\tau}{\sqrt{a}} = \int \frac{\zeta\,d\zeta}{\sqrt{(a\zeta - \zeta\zeta)}}$$

Quibus formulis in ſeriem reſolutis debiteque integratis, erit

$$2\sqrt{2}.mt = \frac{2}{3} z^{3:2} + \frac{1.2}{2.5.a} . z^{5:2} + \frac{1.3.2.z^{7:2}}{2.4.7.a^2} + \frac{1.3.5.2.z^{9:2}}{2.4.6.9.a^3} + \&c.$$

$$2\sqrt{2}.m\tau = \frac{2}{3} \zeta^{3:2} + \frac{1.2.\zeta^{5:2}}{2.5.a} + \frac{1.3.2.\zeta^{7:2}}{2.4.7.a^2} + \frac{1.3.5.2.\zeta^{9:2}}{2.4.6.9a^3} + \&c.$$

adeoque

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (z^{3:2} - \zeta^{3:2}) + \frac{n}{10.a\sqrt{2}} (z^{5:2} - \zeta^{5:2}) + \frac{3.n}{56.a^2.\sqrt{2}} (z^{7:2} - \zeta^{7:2}) + \frac{5.n}{144.a^3\sqrt{2}} (z^{9:2} - \zeta^{9:2}) + \&c.$$

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 211. Si axis maior ſit infinitus, ellipſis abit in parabolam, atque erit breuiſſime

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(z^{3:2} - \zeta^{3:2})$$

prorſus ut in ſolutione tertia problematis XV. (§. 83.)

COROLLARIVM II.

§. 212. Patet itaque, quid tempori ex hypotheſi parabolae computato addendum ſit, quo habeatur tempus, quo cometa arcum NQM ellipticum percurrit. Primus enim ſeriei erutae terminus ab axe maiore ellipſeos non pendet, unde ſi ſolus retineatur, parabolae inſeruit

COROLLARIVM III.

§. 213. Similiter ſi FB ſit hyperbolae axis tranſuerſus, tempus lapſus hyderbolici cometae ex m in ſolem F, erit (§. 210.)

$$t = \frac{n}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}z^{3:2} - \frac{1.2.z^{5:2}}{2.5.a} + \frac{1.3.2.z^{7:2}}{2.4.7.a^2} - \frac{1.3.5.2.z^{9:2}}{2.4.6.9.a^3} + \&c.\right)$$

Unde facile conſtruetur *ſcala celeritatum hyperbolicarum*, ſcalae ellipticarum & parabolicarum ſimilis.

THEO-

THEOREMA XXII.

§. 214. *Axi maiori ellipſeos AB inſiſtat ſemicirculus AqB, ducta chorda NM axi AB parallela, erigantur ordinatae PNn, RMm, dico, ſi pro ellipſi ſol ſit in foco F, pro circulo vero in centro C, arcus NQM, nqm eodem tempore percurſum iri.* Fig. 26.

DEMONSTRATIO.

E centro C erigatur normalis CQq. haec utramque chordam NM, nm biſecat, ducta itaque FQ, erit QE = qg (§. 180.) & ellipſis iuxta praecepta Lemmatis XXIV. (§. 173.) per Q ducenda hoc caſu, ob FQ = AC, abit in circulum $\nu Q\mu$, circulo AqB aequalem. Ducta itaque $\nu E\mu$ ad FQ normali, arcus $\nu Q\mu$ eodem tempore percurritur, quo arcus NQM (§. 183) At vero ob FQ = Cq, QE = qg, arcus nqm arcui $\nu Q\mu$, & chorda nm chordae $\nu\mu$ eſt aequalis. Unde ſi centrum ſolis pro circulo AqB ſtatuatur in C, arcus nqm eodem tempore percurritur, quo arcus ellipticus NQM.

COROLLARIVM I.

§. 215. Quodſi ergo detur tempus, quo cometa peruenit ex A in N, haud difficulter dabitur tempus, quo peruenit ex A in M, & viciſſim. Addendum enim vel demendum erit tempus, quo percurritur arcus circularis nm. Huius vero computus longe eſt facillimus. Erit enim tempus iſtud ad tempus cometae periodicum ut arcus nqm ad peripheriam circuli AqB integram.

COROL-

COROLLARIVM II.

Fig. 21. §. 216. Similiter, cum hoc theorema a ſitu foci F non pendeat, ſi ponatur centrum ſolis in A, ut ſit AF=o, cometa motu elliptico ex B in A delabens eodem tempore percurrit partem abſciſſam RP, quo percurritur arcus circularis nqm. ut adeo iterum dato tempore, quo cadit ex B in R facillime reperiatur tempus quo cadit ex B in P, ſiue etiam dato tempore quo peruenit ex P in A, reperiatur tempus, quo decidit ex R in A.

THEOREMA XXIII.

§. 217. *Dato axe maiori AB, motus cometae per arcum quemlibet NM reduci poterit ad motum in alia ellipſi aeque periodica NQM, ita ut in hac eodem tempore percurrat arcus nQ, Qm ab utraque verticis parte aequales.*

DEMONSTRATIO.

Biſecta chorda NM in G, ſumtaque ſemiſumma radiorum vectorum (FN+FM):2, conſtruatur triangulum rectangulum FEm, ita ut ſi

$$Fm = \frac{FN+FM}{2}$$

$$Em = \tfrac{1}{2}NM$$

Quo facto ſumatur differentia inter Fm & axin AB, atque haec transferatur ex m in φ, eritque φ focus alter ellipſeos quaeſitae. Biſecta itaque φF in c, fiat cQ = cb = AC, eritque Qb axis maior. Dato vero foco F & axe maiori Qb ellipſis conſtrui poterit, eritque nQm arcus quaeſitus (§. 183.)

Tabu-

ad §. 115.

Tabula lapſus parabolici cometarum in ſolem.

Tempus d. h.	Diſtant. a centro ſolis	Tempus d. h.	Diſtant. a centro ſolis	Tempus d. h.	Diſtant. a centro ſolis
0, 0	0,00000	3, 3	0,23516	8,12	0,45822
0, 3	0,02750	3, 6	0,24139	8,18	0,46712
0, 6	0,04366	3, 9	0,24754	9, 0	0,47601
0, 9	0,05721	3,12	0,25360	9, 6	0,48479
0,12	00,6930	3,15	0,25961	9,12	0,49348
0,15	0,08042	3,18	0,26055	9,18	0,50211
0,18	0,09082	3,21	0,27142	10, 0	0,51065
0,21	0,10064	4, 0	0,27722	10,12	0,52753
1, 0	0,11002	4, 6	0,28866	11, 0	0,54415
1, 3	0,11900	4,12	0,29987	11,12	0,56052
1, 6	0,12766	4,18	0,31088	12, 0	0,57665
1, 9	0,13604	5, 0	0,32169	12,12	0,59256
1,12	0,14416	5, 6	0,33233	13 -	0,60826
1,15	0,15206	5,12	0,34279	14 -	0,63906
1,18	0,15976	5,18	0,35311	15 -	0,66914
1,21	0,16728	6, 0	0,36327	16 -	0,69856
2, 0	0,17464	6, 6	0,37326	17 -	0,72737
2, 3	0,18[illegible]84	6,12	0,38318	18 -	0,75563
2, 6	0,18891	6,18	0,39294	19 -	0,78336
2, 9	0,19584	7, 0	0,40258	20 -	0,81061
2,12	0,20265	7, 6	0,41211	21 -	0,83741
2,15	0,20935	7,12	0,42153	22 -	0,86379
2,18	0,21595	7,18	0,43085	23 -	0,88977
2,21	0,22244	8, 0	0,44006	24 -	0,91538
3, 0	0,22884	8, 6	0,44919	25 -	0,94063
3, 3	0,23516	8,12	0,45822	26 -	0,96555

Tabula lapſus cometarum parabolici in ſolem.

Tempus dies	Diſtant. a centro ſolis	Tempus dies	Diſtant. a centro ſolis	Tempus dies	Diſtant. a centro ſolis
26	0,96555	51	1,51300	76	1,97394
27	0,99015	52	1,53272	77	1,99122
28	1,01442	53	1,55230	78	2,00843
29	1,03846	54	1,57176	79	2.02555
30	1,06220	55	1.59111	80	2,04261
31	1,08567	56	1,61034	81	2,05960
32	1,10890	57	1,62945	82	2,07651
33	1,13188	58	1,64845	83	2,09336
34	1,15463	59	1,66735	84	2,11014
35	1,17717	60	1,68614	85	2,12685
36	1,19948	61	1,70482	86	2,14350
37	1,22159	62	1,72340	87	2,16079
38	1,24351	63	1,74188	88	2,17661
39	1,26523	64	1,76026	89	2,19307
40	1,28676	65	1,77855	90	2,20946
41	1,30812	66	1,79675	91	2,22580
42	1,32931	67	1.81485	92	2,24208
43	1,35032	68	1.83287	93	2,25829
44	1,37118	69	1.85080	94	2,27415
45	1,39188	70	1,86863	95	2,29056
46	1,41243	71	1,88639	96	2,30660
47	1,43282	72	1,90406	97	2,32260
48	1,45307	73	1,92165	98	2,33853
49	1,47318	74	1,93916	99	2,35441
50	1,49315	75	1,95659	100	2,37024
51	1,51300	76	1,97394	- -	- - -

Tabula lapſus cometarum elliptici in ſolem.

Tempus	Diſtant. a ſole	Tempus	Diſtant. a ſole	Tempus	Diſtant. a ſole
0	0	17	7008	34	9355
1	1270	18	7209	35	9434
2	1984	19	7399	36	9508
3	2562	20	7580	37	9577
4	3062	21	7753	38	9642
5	3513	22	7918	39	9699
6	3921	23	8075	40	9751
7	4298	24	8226	41	9799
8	4647	25	8368	42	9842
9	4973	26	8503	43	9880
10	5279	27	8631	44	9912
11	5567	28	8753	45	9939
12	5840	29	8869	46	9961
13	6100	30	8978	47	9978
14	6343	31	9081	48	9990
15	6575	32	9178	49	9998
16	6797	33	9269	50	10000
17	7008	34	9355	- -	- - -

Errata.

p. 7. §. 23. lin. 2. pro PMF lege QMF

p. 10. - - - lin. 7. pro FM - FH l. FM - FN

p. 15. §. 37. lin. 5. pro ſin FRM : (ſFRM + c) lege ſFMR : (ſFMR + c)

p. 15. §. 37. lin. 16. pro angulo FMN lege angulo RMN

p. 23. §. 52. lin. 10. pro Ducatur BD lege Ducatur Bd

p. 25. §. 56. lin. 11. pro $NEF = \frac{1}{2} QEB$ lege $NEF = \frac{1}{2} QFB$

p. 26. - - lin. antipen. pro $\frac{1}{6} GQ = + \frac{1}{2} FQ$ lege $\frac{1}{6} GQ + \frac{1}{2} FQ$

p. 44. - - - lin. 11. pro $\sqrt{2} QG + \frac{1}{3} QG$ lege $\sqrt{2} QG + \frac{4}{3} QG$

p. 47. §. 100. l. 5. pro $m\sqrt{2} : \sqrt{MF}$ l. $2m\sqrt{2} : \sqrt{MF}$

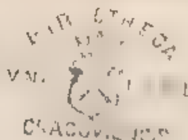
p. 53. - - - l. 3. pro 29 lege 34

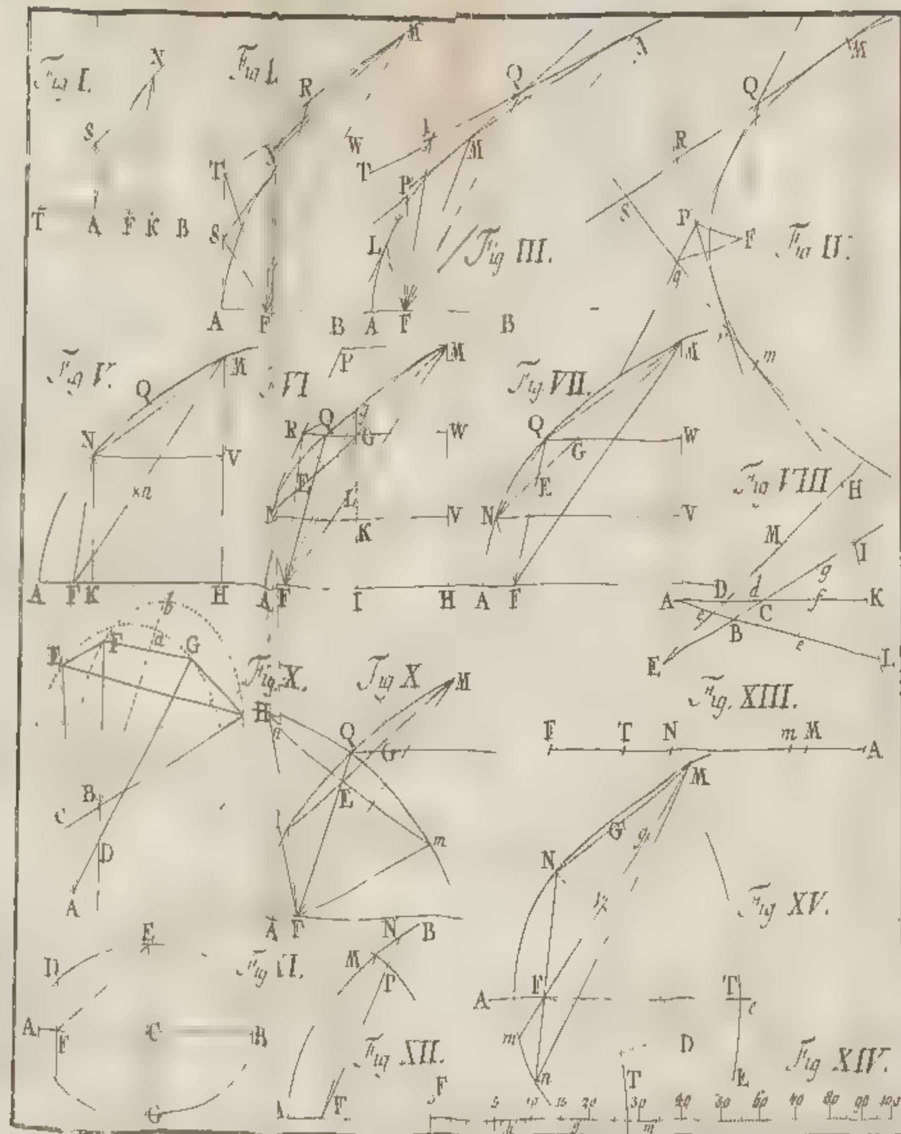
p. 53. - - - l. 5. pro 22 lege 27

p. 58. - - - l. 11. pro QI lege GI

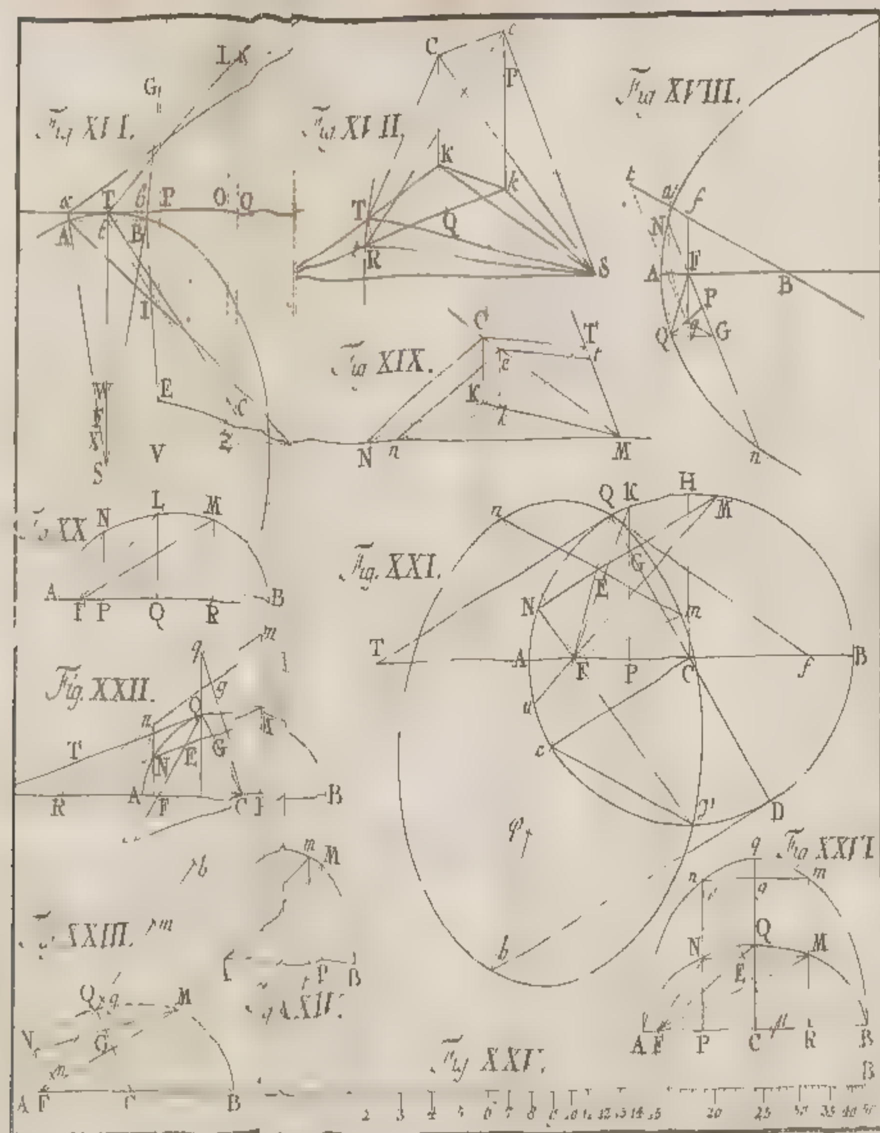
p. 65. §. 130. lin. 7. pro ſin NFK lege ſin NFH

p. 81. - - - l. 6. pro qh tangβ pq tangα lege qh tangβ = pg tα





Orbit. Comet Tab. I.



Orbit. Comet. Tab. II.



